$\boxed{9A}$ (1) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと $a=b=1$。よって $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b}$

(2) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと $a=b=0$。よって $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと $x=2, y=-1$。よって $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2\vec{a} - \vec{b}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ には解 $x, y \in \mathbb{R}$ が存在しないため、$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線型結合で表すことはできない。

(5) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと、$x=-2, y=1$。よって $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -2\vec{a} + \vec{b}$

$\boxed{9B}$ (1) なす角を θ とすると、(余弦定理より) $\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$。よって $\theta = \pi/4$

(2) (1)と同様に、$\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{2}$。よって $\theta = \pi/3$

(3) (1)と同様に、$\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\\4\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\3\\4\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{9}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{27}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。よって $\theta = \pi/6$

$\boxed{9C}$ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$ なる直線 L の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ である。

(1) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z+2}{2}$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ のスカラー倍でないため、L と平行ではない。L のパラメータ表示 $\begin{matrix}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=2+4t\end{matrix}$ を代入すると $\dfrac{3+2t}{3} = \dfrac{2+3t}{4} = \dfrac{4+4t}{2}$

これを満たす $t \in \mathbb{R}$ は存在しないので、L と (1) の直線は交わらない。

(2) 与えられた直線の方向ベクトルは$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$なので、これは$L$と平行である。

(3) (1)と同様に与えられた直線はLと平行ではない。

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{2}$ に Lのパラメータ表示 $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=2+4t\end{cases}$ を代入すると

$\dfrac{2+2t}{3}=\dfrac{2+3t}{4}=\dfrac{2+4t}{2}$ これを満たす $t\in\mathbb{R}$ は存在しないので、Lと(3)の直線は交わらない。

$\boxed{9D}$ (1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ より、求める直線の方向ベクトルは$\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$である。(よって、単位方向ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ である)

Hと(1)の平面は$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-t\\y=2t+1\\z=-t\end{cases}$ である。

(2) (1)と同様に、$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ より、求める直線の単位方向ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ である。

Hと(2)の平面は$\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-3t+1\\y=t-\frac{2}{3}\\z=2t+\frac{2}{3}\end{cases}$ である。

(3) (1)と同様に、$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ より、求める直線の単位方向ベクトルは$\dfrac{\pm1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$である。

Hと(3)の平面は$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-t+1\\y=t\\z=0\end{cases}$ である。

(4) (1)と同様に、$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ より、求める直線の単位方向ベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ である。

Hと(4)の平面は$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-t\\y=1\\z=t\end{cases}$ である。

$\boxed{9E}$ (1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ より、平面の法線ベクトルは$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$である。

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$を平面は含むため、平面の方程式は $z=1$ である。

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ より，平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ を平面は含むため，平面の方程式は $x-y+z=2$ である。

(3) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ より，平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むため，平面の方程式は $x-z=0$ である。

(4) $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ より，平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を平面は含むため，平面の方程式は $x-3y+4z=2$ である。

$\boxed{9F}$ (1) $\begin{cases}x=s\\y=t\\z=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=s\\y=s\\z=t\end{cases}$

(3) $x+y+z=0$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ と直交する線型独立なベクトルは，例えば $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ であるから

さらに $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むので

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{cases}x=s+t\\y=-s\\z=-t\end{cases}$

(4) (3) を思い出す。$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むので $\begin{cases}x=s+t+1\\y=-s\\z=-t\end{cases}$

(5) $x+2y+3z=1$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ と直交する線型独立なベクトルは，例えば $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ で，さらに $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むので，$\begin{cases}x=2s+3t+1\\y=-s\\z=-t\end{cases}$

(ただし (1)〜(5) で，$s,t\in\mathbb{R}$ はパラメータ)

$\boxed{9G}$ (1) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\+4\\-3\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\boxed{9H}$ (1) $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}=6+4+2-(4+4+3)=1$ (2) $\det\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&-2\\1&1&3\end{pmatrix}=-6-2+2-(-4-2+3)=-3$