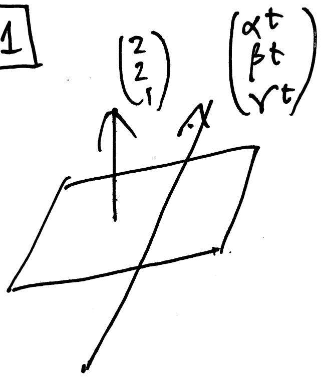
9.1



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)|\vec{v}||\vec{w}| = \vec{v}\cdot\vec{w}$$

ここで $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

よって $\sin\theta = \dfrac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

$$\theta = \arcsin\frac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

9.2. (1) 直線のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ となる。

よって求める必要十分条件は

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\alpha(1+t)+\beta(-t)+\gamma\cdot 0 = 0$

$\alpha(1+t)+\beta(-t)+\gamma\cdot 0 = t(\alpha-\beta)+\alpha+\delta = 0$ なので $\alpha=\beta$
$\alpha+\delta=0$

(2) 平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ と平面 $x+y+z=0$ が交わるための必要十分条件は，連立方程式

$\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ に解が存在すること，つまり

(☆) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\1&1&1\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ である。（注 後に学びます）

case1 $(\alpha\ \beta\ \gamma)=\exists t(1,1,1)$ のとき (i.e. $\alpha=\beta=\gamma\ (\neq 0)$) のとき

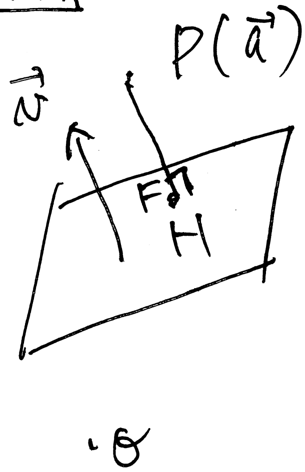
(☆)の左辺$=1$，右辺$=2$ なので不適

case2 それ以外のとき，(☆)の両辺は共に2なので(☆)が成立する。

まとめると求める必要十分条件は「$\alpha=\beta=\gamma$でない」となる。

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta-\gamma\\ \gamma-\alpha\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$ より．これが求める直線の方向ベクトルである。

$\boxed{9.3.}$



(1) FはH上にあるので $\vec v\cdot\vec x=-\delta$

$\vec x-\vec a=\exists t\vec v$ なので代入すると

$t\|\vec v\|^2+(\vec v,\vec a)=-\delta$ $\therefore\ t=\dfrac{-\delta-(\vec a,\vec v)}{\|\vec v\|^2}$

(2) $\|\vec x-\vec a\|=|t|\,\|\vec v\|=\dfrac{\delta+(\vec a,\vec v)}{\|\vec v\|}$

$\boxed{9.4.}$ 三角不等式より $\|Q-R\|+\|R-P\|\geqq\|Q-P\|$

仮定より $\|Q-P\|>2\|P-R\|$ なので $\|Q-R\|>\|R-P\|$ である。

$\boxed{9.5}$ nについての帰納法で示す。$n=1$のときは明らかである。

$\vec a={}^t(a_1,\cdots,a_{n+1})$, $\vec b={}^t(b_1,\cdots,b_{n+1})$ について $\vec a'={}^t(a_1,\cdots,a_n)$, $\vec b'={}^t(b_1,\cdots,b_n)$ とすると

$$(\vec a\cdot\vec a)(\vec b\cdot\vec b)-(\vec a\cdot\vec b)^2=\left((\vec a'\cdot\vec a')+a_{n+1}^2\right)\left((\vec b'\cdot\vec b')+b_{n+1}^2\right)-\left((\vec a'\cdot\vec b')+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2$$

$$=\underline{\underline{\left((\vec a'\cdot\vec a')(\vec b'\cdot\vec b')-(\vec a'\cdot\vec b')^2\right)}}+\underbrace{a_{n+1}^2(\vec b'\cdot\vec b')+b_{n+1}^2(\vec a'\cdot\vec a')-2a_{n+1}b_{n+1}(\vec a'\cdot\vec b')}$$

$$\sim\sim=a_{n+1}^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)+b_{n+1}^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)-2a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)$$

$$=\sum_{1\le i\le n}(a_ib_{n+1}-a_{n+1}b_i)^2$$ である。＝部は帰納法の仮定から $\displaystyle\sum_{1\le p<q\le n}(a_pb_q-a_qb_p)^2$

なので示された。