12.3 (1) 容易なので略

(2) E_{ij} を (i,j) 成分が 1 で、それ以外は 0 であるような $n\times n$ 行列とする(行列単位)

$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ が確認できる。ここで $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j\neq k) \end{cases}$ はクロネッカーのデルタ。

よって

$$DE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$$
$$E_{ij}D = \lambda_j E_{ij}$$

である。今、$A = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij}$ を $AD=DA$ なる行列とする。

$AD=DA$ から $\lambda_i a_{ij} - \lambda_j a_{ij} = 0 \ (1\leq i,j\leq n)$ がみちびかれるから.

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がどの2つも異なるなら $\forall i \neq \forall j \ a_{ij}=0$ をえる。

つまり A は対角行列 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}$ ということである。

(逆は(1)で示されている)

12.1 (1) $z=\alpha+\beta i$, $w=p+qi$ とおいて計算すればよい。

$$v(\lambda z+\mu w) = v((\lambda\alpha+\mu p)+(\lambda\beta+\mu q)i) = \begin{pmatrix}\lambda\alpha+\mu p \\ \lambda\beta+\mu q\end{pmatrix}$$

$$A(\lambda z+\mu w) = \begin{pmatrix}\lambda\alpha+\mu p & -(\lambda\beta+\mu q) \\ \lambda\beta+\mu q & \lambda\alpha+\mu p\end{pmatrix}$$ といった具合である。

(2) (1)と同様である。例えば $A(z)A(w)=A(zw)$ は $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & -q \\ q & p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha p-\beta q & -(\alpha q+\beta p) \\ \alpha q+\beta p & \alpha p-\beta q\end{pmatrix}$

をcheckする。

(3) $z^{-1} = \dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ より $A(z^{-1}) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x & y \\ -y & x\end{pmatrix}$ である。

これは $A(z)^{-1} = \begin{pmatrix}x & -y \\ y & x\end{pmatrix}^{-1}$ に等しい。

12.4 (1) $A^M = O = B^N$ とする。$AB=BA$ より

$$(A+B)^{M+N} = \sum_{k=0}^{M+N} \binom{M+N}{k} A^k B^{M+N-k} \quad \text{—— } (*)$$

ここで $k \geqq M$ 又は $M+N-k \geqq N$ (ただし $k=0,\cdots,M+N$) なので $(*)$ の右辺は O である。

よって $(A+B)^{M+N} = O$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$

$C^l = O$ なら $(\det C)^l = 0$ より $\det C = 0$ であることに注意すると

$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\det(A+B) = -1$ なので冪零ではない。

(3) (1) の記号を用いる。

$$e(A+B) = \sum_{l=0}^{M+N} \frac{1}{l!}(A+B)^l = \sum_{l=0}^{M+N} \frac{1}{l!} \sum_{\substack{\alpha+\beta=l \\ \alpha,\beta \geqq 0}} \frac{l!}{\alpha!\,\beta!} A^\alpha B^\beta$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqq \alpha+\beta \leqq M+N \\ \alpha,\beta \geqq 0}} \frac{A^\alpha}{\alpha!} \frac{B^\beta}{\beta!}$$

(注 少しgapがあります)

$$= \left(\sum_{0 \leqq \alpha \leqq M} \frac{A^\alpha}{\alpha!} \right) \left(\sum_{0 \leqq \beta \leqq N} \frac{B^\beta}{\beta!} \right) = e(A)\,e(B)$$

12.2 (左辺) $= \sum_{i=1}^{m} (BC)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} C_{ki}$

(右辺) $= \sum_{i=1}^{n} (CB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} C_{ik} B_{ki}$

この2つは同じ $m \times n$ コの和である。