$\boxed{13.1.}$ （必要であること）

$A\vec{0}_n = \vec{0}_m$ なので A が単射であれば $A\vec{v} = \vec{0}_m$ なる $\vec{v}$ は

$\vec{v} = \vec{0}_m$ に限られる。

（十分であること）

$A\vec{v} = A\vec{v}'$ のとき $\vec{v} = \vec{v}'$ を示せばよい（ここで $\vec{v}, \vec{v}' \in \mathbb{R}^n$）。$\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}'$ とおくと

$A\vec{w} = A\vec{v} - A\vec{v}' = \vec{0}_m$ なので仮定から $\vec{w} = \vec{0}_m$，つまり $\vec{v} = \vec{v}'$ が従う。

$\boxed{13.2.}$ (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ より

$$A^2 - (\mathrm{tr}\,A)A + (\det A)E = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 一般に A が $Q(A) = O$ をみたすとき，

$P(x) = Q(x)R(x) + S(x)$ であれば $P(A) = S(A)$ である。

（ここで $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ は多項式で，例えば $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ について

$P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$ と定義される。ただし $A^0 = E$ である）

よって $x^2 + ax + 1$ $(a = -1, 0, 1)$ が $x^{12} - 1$ を割り切ることを言えばよいが，

それは以下の因数分解より分かる。

$$\begin{aligned} x^{12} - 1 &= (x^6 - 1)(x^6 + 1) \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1) \end{aligned}$$

$\boxed{13.3}$ (1) 左辺の (i,j) 成分は $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) b_{kj}(t)\right)'$

右辺の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}'(t) b_{kj}(t) + \sum_{l=1}^{n} a_{il}(t) b_{lj}'(t)$

この2つは合成関数の微分法より等しい。

ここで $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B(t) = (b_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ とした。

(2) $(\text{左辺}) = \begin{pmatrix} -\lambda \sin \lambda t & -\lambda \cos \lambda t \\ \lambda \cos \lambda t & -\lambda \sin \lambda t \end{pmatrix}$

$(\text{右辺}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \lambda t & -\cos \lambda t \\ \cos \lambda t & -\sin \lambda t \end{pmatrix}$

よってこの2つは等しい。

同様に $(\text{第2式の左辺}) = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mu e^{\mu t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} = (\text{第2式の右辺})$

(3) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ とする。$\|\vec{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2(t)$ も定数になるので

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{3} 2x_i'(t) x_i(t) = 2\vec{x}(t)' \cdot \vec{x}(t) = 0$$

これは $\vec{x}'(t)$ と $\vec{x}(t)$ が直交していることを言っている。

$\boxed{13.5}$ $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ と $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ が平行 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists(\lambda, \mu) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ が平行であるとする。 $\vec{a} = \vec{0}$ なら 明らかに $\begin{vmatrix} a_i & b_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ なら $\mu \neq 0$ より $\vec{b} = \frac{-\lambda}{\mu}\vec{a}$ $\therefore b_j = \frac{-\lambda}{\mu} a_j$.

よって $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0$ //

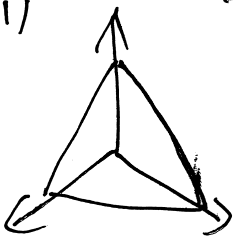
逆に $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = 0$ とする。 $\vec{a} = \vec{0}$ なら $\lambda = 1, \mu = 0$ ととれて、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行.

$\vec{a} \neq 0$ なら ある $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ があって $a_{i_0} \neq 0$。今、 $a_j b_{i_0} = a_{i_0} b_j$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ より

$b_j = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}} a_j$. よって $\lambda = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}}$, $\mu = -1$ ととれば $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = 0$ $\therefore \vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行 //

13.4.

(1) $\vec{e_1}$の行き先を調べる。



$$x+y+z=1,\quad x^2+y^2+z^2=1,\quad y=z$$ を解くと $$x+2y=1,\quad x^2+2y^2=1$$

$\therefore (1-2y)^2+2y^2 = 6y^2-4y+1=1$ から $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ であることが分かる。

同様に $\vec{e_2}$ は $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ に、$\vec{e_3}$ は $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ にうつることが分かる。

以上より、$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(2) e_1の行き先をしらべる. $x+y+z=0$ の法線ベクトルは $(1,1,1)$ のため.

$(1,0,0)^T + t(1,1,1)^T$ が $x+y+z=0$ の点になる t は $-\frac{1}{3}$.

よって. $e_1 \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ にうつる. 同様に. $e_2 \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $e_3 \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ゆえ.

以上より $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) (2)から. $(1,0,0)^T + t(1,1,1)^T$ が e_1の鏡映の点は. $t=-\frac{2}{3}$ のときで

$e_1 \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ よって同様に $e_2 \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $e_3 \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

以上より $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.