14.1

$$\begin{matrix} i行 \\ j行 \end{matrix}\begin{pmatrix}\vec{a_i} \\ \vec{a_j}\end{pmatrix} \xrightarrow{j行+i行} \begin{pmatrix}\vec{a_i} \\ \vec{a_i}+\vec{a_j}\end{pmatrix} \xrightarrow{i行-j行} \begin{pmatrix}-\vec{a_j} \\ \vec{a_i}+\vec{a_j}\end{pmatrix} \xrightarrow{j行+i行} \begin{pmatrix}-\vec{a_j} \\ \vec{a_i}\end{pmatrix} \xrightarrow{i行\times(-1)} \begin{pmatrix}\vec{a_j} \\ \vec{a_i}\end{pmatrix}$$

$(i \neq j)$

14.2

(1)
$$\begin{pmatrix} 101 & 111 & 231 \\ 103 & 113 & 233 \\ 105 & 115 & 235 \end{pmatrix} \xrightarrow[3行-1行]{2行-1行} \begin{pmatrix} 101 & 111 & 231 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3行/4]{2行/2} \begin{pmatrix} 101 & 111 & 231 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{並びかえ} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 111 & 231 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3行-1行]{2行-1行\cdot 101} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 130 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\operatorname{rank} A = 2$ より Aは正則でない

14.3

(1)
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行+2行+3行} \begin{pmatrix} 2+a & 2+a & 2+a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

case1

$2+a \neq 0$とすると
$$\xrightarrow{1行/(2+a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[3行-1行]{2行-1行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$a-1 \neq 0$であればこれが階段行列

pivot 3つ

$a=1$ であれば (注 このときも $2+a \neq 0$) これが pivot 1つの階段行列になっている

case2　$a=-2$ とすると

$$\xrightarrow{\text{結で}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{並び替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

まとめると $a-1 \neq 0$ かつ $a+2 \neq 0$ のときに限って A は正則である。

$\boxed{14.5}$ (a)⇒(b)

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & O & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & 1 \\ m & \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)⇒(a)

$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $R = (b_1, \cdots, b_n)$ とする。

case1　$\forall i$, $a_i = 0$ のとき、$A = O$ なので (a) が成立する。

case2　$\exists i_0$, $a_{i_0} \neq 0$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{並び替え}} \begin{pmatrix} a_{i_0} b_1 & \cdots & a_{i_0} b_n \\ a_? b_1 & \cdots & a_? b_n \\ \vdots & & \\ a_* b_1 & \cdots & a_* b_n \end{pmatrix} \xrightarrow[m\text{行}-1\text{行}\cdot\frac{a_*}{a_0}]{2\text{行}-1\text{行}\cdot\frac{a_?}{a_{i_0}}\ \vdots} \begin{pmatrix} a_{i_0} b_1 & \cdots & a_{i_0} b_n \\ & O & \end{pmatrix}$$

$\boxed{14.4}$ (2) $(AB)^T = B^T A^T$ より $r(AB) = r(B^T A^T) \underset{(1)}{\leq} r(B^T) = r(B)$

(1) $r(A) = r$ とすると, $\exists P$: $l \times l$ 可逆 s.t. $PA = \begin{pmatrix} *_1 \\ \hline O \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$ （注 $*_1$ は行階段行列）

よって $P(AB) = (PA)B = \begin{pmatrix} *_2 \\ \hline O \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{matrix}$ なので、$r(AB) \leq r$ である。

（注 $A \xrightarrow{\text{行基本変形}} A' \iff \exists P$: 可逆、$PA = A'$ を用いています）