$\boxed{11A}$ (1) $f_x = 1$ $\quad f_x(1,0) = 1$

$f_y = -1$ $\quad f_y(1,0) = -1$

(2) $f_x = 2x$ $\quad f_x(1,0) = 2$

$f_y = 0$ $\quad f_y(1,0) = 0$

(3) $f_x = 2x$ $\quad f_x(1,0) = 2$

$f_y = 2y$ $\quad f_y(1,0) = 0$

(4) $f_x = y\exp(xy)$ $\quad f_x(1,0) = 0$

$f_y = x\exp(xy)$ $\quad f_y(1,0) = 1$

(5) $f_x = \pi\cos(\pi x + 2\pi y)$ $\quad f_x(1,0) = -\pi$

$f_y = 2\pi\cos(\pi x + 2\pi y)$ $\quad f_y(1,0) = -2\pi$

(6) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad f_x(1,0) = 2$

$f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ $\quad f_y(1,0) = 0$

(7) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad f_x(1,0) = 1$

$f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad f_y(1,0) = 0$

(8) $f_x = \dfrac{1\cdot(x^2+y^2) - x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad f_x(1,0) = -1$

$f_y = \dfrac{x(-2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad f_y(1,0) = 0$

$\boxed{11B}$ (1) $2(x^2+y^2)$ (2) 4 (3) $\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}=2$

(4) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\log(x^2+y^2)=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{2x}{x^2+y^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ($\boxed{11A}$ (8))

対称性から $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\log(x^2+y^2)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\therefore \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log(x^2+y^2)=0$

(5) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{y(-2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x(-2y)}{(x^2+y^2)^2}$ $\therefore \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

(6) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin x\cos y)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\cos y\cos x)=-\cos y\sin x$

$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin x\cos y)=\dfrac{\partial}{\partial y}(-\sin x\sin y)=-\sin x\cos y$ $\therefore$ (和) $=-2\sin x\cos y$

$\boxed{11C}$ (1) $\nabla f(2,1)=\begin{pmatrix} f_x(2,1)\\ f_y(2,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

接平面の方程式：

$z=f(2,1)+f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)$

$=3+(x-2)+(y-1)$

$\therefore x+y-z=0$

(2) $\nabla f(2,1)=\begin{pmatrix} y\big|_{(x,y)=(2,1)}\\ x\big|_{(x,y)=(2,1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

接平面の方程式： $z=f(2,1)+1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)=2+(x-2)\quad(y-1)$

$\therefore x+2y-z=2$

(3) $\nabla f(2,1)=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

接平面の方程式： $z=5+4(x-2)+2(y-1)$ $\therefore 4x+2y-z=5$

(4) $\nabla f(2,1)=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

接平面の方程式： $z=3+4(x-2)-2(y-1)$ $\therefore 4x-2y-z=3$

(5) $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$ より $\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

接平面の方程式 $z = 2 + 1\cdot(x-2) + (-2)(y-1)$ $\therefore x - 2y - z = -2$

(6) $\nabla f = \begin{pmatrix} \pi y \cos(\pi x y) \\ \pi x \cos(\pi x y) \end{pmatrix}$ より $\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$

接平面の方程式 $z = 0 + \pi(x-2) + 2\pi(y-1)$ $\therefore \pi x + 2\pi y - z = 4\pi$

$\boxed{11E}$ (1) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+2 \end{pmatrix}$ $\therefore (x,y) = (1,-1)$

(2) $\nabla f = \begin{pmatrix} (y^2+1)2x \\ (x^2-1)2y \end{pmatrix}$ $\therefore (x,y) = (0,0)$,

(3) $\nabla f = \begin{pmatrix} y e^{-(x^2+y^2)/2} + xy(-x) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ x e^{-(x^2+y^2)/2} + xy(-y) e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1-x^2) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ x(1-y^2) e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$

$\therefore (x,y) = (0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$

(4) $\nabla f = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2} + (x+y)(-2x) e^{-x^2-y^2} \\ e^{-x^2-y^2} + (x+y)(-2y) e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(1-2xy-2x^2) \\ e^{-x^2-y^2}(1-2xy-2y^2) \end{pmatrix}$

$2x^2 + 2xy = 1$
$2y^2 + 2xy = 1$ より $(x+y)^2 = 1$

<u>case1</u> $x = 1-y$ のとき $1 - 2xy - 2x^2 = 1 - 2y(1-y) - 2(1-y)^2$

$= 1 - 2y + 2y^2 - 2(1 + y^2 - 2y) = 2y - 1$

$1 - 2y(1-y) - 2y^2 = 1 - 2y$

より $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ が $\nabla f = 0$ なる点である

case 2　$x=-1-y$ のとき　$1-2xy-2x^2 = 1+2y(1+y)-2(1+y)^2 = -1-2y$

$1-2xy-2y^2 = 1+2y(1+y)-2y^2 = 1+2y$

より $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ が $\nabla f=0$ なる点である。

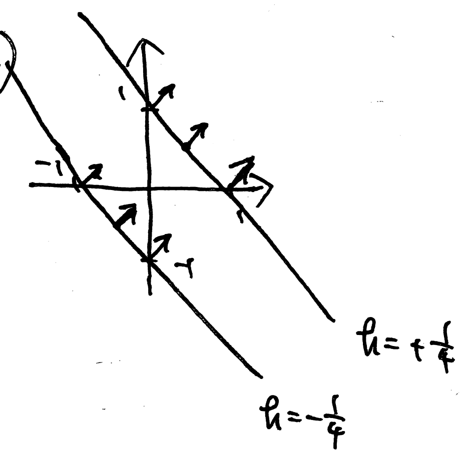
まとめると、$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ が f の停留点である。

(5) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2yx^2 \end{pmatrix}$ より $x=0$ 又は $y=0$ となる全ての (x,y) が f の停留点である。

(6) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2-1)2x \\ 2(x^2+y^2-1)2y \end{pmatrix}$ より $(x,y)=(0,0),(\cos\theta,\sin\theta)$ $\begin{pmatrix} \text{ここで} \\ 0\leqq\theta<2\pi \end{pmatrix}$

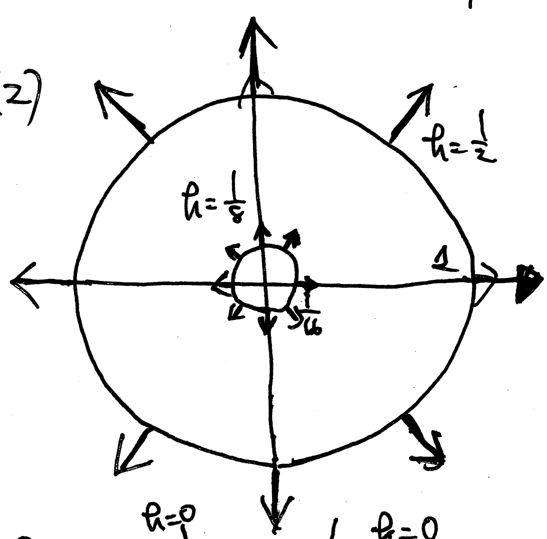
が f の停留点である。

$\boxed{11D}$ (1)



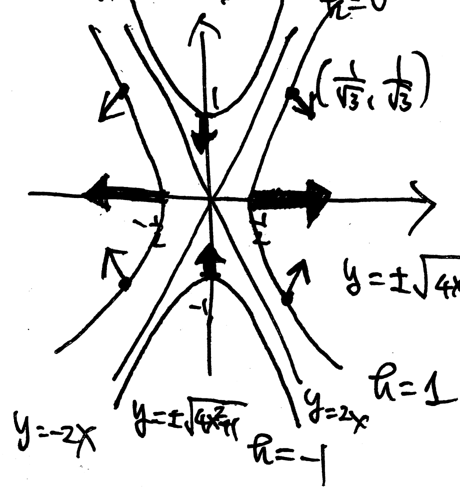
$\nabla f = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2)



$\nabla f = {}^t\left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(3)



$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix}$

（注 矢印の大きさ・向きは計算していないのででたらめです。詳しくは共通資料のページにある解答を参考にして下さい。）