$\boxed{6A}$ (1) $y' = -\lambda a \sin(ax+b) + \mu a \cos(ax+b)$

$y'' = -\lambda a^2 \cos(ax+b) - \mu a^2 \sin(ax+b) = -a^2(\lambda \cos(ax+b) + \mu \sin(ax+b))$

$= -a^2 y$

(2) $y' = \dfrac{a}{ax+b} = a e^{-\log(ax+b)} = a e^{-y}$

(3) $y' = \dfrac{a}{\cos^2(ax+b)} = a(1 + \tan^2(ax+b))$

$y'' = 2a \tan(ax+b) \dfrac{a}{\cos^2(ax+b)} = 2ayy'$

(4) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = -\dfrac{1}{2} \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x^2)} = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$(1-x^2)y'' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xy'$

(5) $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ より

$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = \dfrac{2x}{(1-x)^2} + \dfrac{1-3x}{(1-x)^2} - \dfrac{1-x}{(1-x)^2} = 0$

$\boxed{6B}$ (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int 2x\,dx$ より $\mathrm{arsinh}\, y = x^2 + C$

$\therefore y = \sinh(x^2 + C)$ (Cは定数)

(2) $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$ より $\arctan y = x + C$ $\therefore y = \tan(x+C)$ (〃)

(3) $\displaystyle\int e^y dy = \int e^x dx$ より $e^y = e^x + C$ $\therefore y = \log(e^x + C)$ (〃)

(4) $\displaystyle\int \cosh y\, dy = \int dx$ より $\sinh y = x + C$ $\therefore y = \mathrm{arsinh}(x+C)$ (〃)

$\boxed{6C}$ (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y-a} = \int k\,dx$ より $\log|y-a| = kx + C$

$\therefore y = \pm e^{C} e^{kx} + a \qquad \therefore y = De^{kx} + a$ （D は定数）

(2) $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)} = \int k\,dx$ より $\displaystyle \log\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = (a-b)(kx + C)$

$\shortparallel$

$\displaystyle \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y-b}\right)dy \qquad \therefore \frac{y-a}{y-b} = \pm e^{(a-b)C} e^{k(a-b)x}$

つまり $y - a = De^{k(a-b)x}y - bDe^{k(a-b)x}$ （$D = \pm e^{(a-b)C}$ とおいた）

$\displaystyle \therefore y = \frac{bDe^{k(a-b)x} - a}{De^{k(a-b)x} - 1} = \frac{bDe^{kax} - ae^{kbx}}{De^{kax} - e^{kbx}}$ および $y = a, b$

（注 $D = 0, \infty$ にそれぞれ対応）

(3) $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-a)^2} = \int k\,dx$ より $\displaystyle -\frac{1}{y-a} = kx + C \qquad \therefore y = a - \frac{1}{kx+C}$ および $y = a$

(4) $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-a)^3} = \int k\,dx$ より $\displaystyle -\frac{1}{2(y-a)^2} = kx + C \qquad \therefore y = a \pm \frac{1}{\sqrt{D-2kx}}$ および $y = a$

（注 $D = -2C$ は定数）

$\boxed{6D}$ (1) $\displaystyle\int y\,dy = \int x\,dx$ より $\displaystyle \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \qquad \therefore y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$

条件より $y = \sqrt{x^2+1}$

(2) $\displaystyle\int y\,dy = +\int -x\,dx$ より $\displaystyle \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \qquad \therefore y = \pm\sqrt{2C - x^2}$

条件より $y = \sqrt{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\int 2y\,dy = \int dx$ より $y^2 = x + C \qquad \therefore y = \pm\sqrt{x+C}$

条件より $y = \sqrt{x+1}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$ より $\arctan y = x + C \qquad \therefore y = \tan(x + C)$。 条件より $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{6E}$ (1) $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$ より $\log|y| = \frac{x^2}{2} + C$

$\therefore y = \pm e^C e^{\frac{x^2}{2}}$ よって $y = De^{\frac{x^2}{2}}$ (Dは定数)

(2) $\int \frac{dy}{y} = \int \sin x\,dx$ より $\log|y| = -\cos x + C$

$\therefore y = \pm e^C e^{-\cos x}$ よって $y = De^{-\cos x}$ (Dは定数)

(3) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ より $\log|y| = \log(1+x^2) + C$

$\therefore y = \pm e^C e^{\log(1+x^2)} = \pm e^C \cdot (1+x^2)$ よって $y = D(1+x^2)$ (Dは定数)

(4) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ より $\log|y| = \log(e^x+1)$

(3)と同様に $y = D(e^x+1)$ (Dは定数)

(5) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\cosh x}$ より $\log|y| = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 2\arctan(e^x) + C$

よって $y = D\exp(2\arctan x)$ (Dは定数)

$\boxed{6F}$ なる: (1), (4), (5)

ならない: (2), (3)

例えば(4)を示すと: $y_1' = x^2 y_1$, $y_2' = x^2 y_2$ のとき、$y = \lambda y_1 + \mu y_2$ について

$$y' = \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda x^2 y_1 + \mu x^2 y_2 = x^2(\lambda y_1 + \mu y_2) = x^2 y$$

例えば(2)の例: $y = -1$ は(2)の解だが、$2y$ は(2)の解ではない。