$\boxed{1}$ $x, y, \cdots$ を未知変数とする以下の連立方程式を解け．ただし，変数・パラメータ共に実数の範囲を考えるものとする．また (b) と (c) では，解を持つための定数 $a, b, \cdots$ の条件を求め，その条件下で解を求めよ．

(a). $\begin{cases} x+2y+6z+7w=-1 \\ 3x+y+3z+16w=2 \\ 3x-4y-12z+11w=7, \end{cases}$ (b). $\begin{cases} x+y-2z+3w=a \\ x+2y+z-2w=b \\ 2x+3y-z+w=c \\ 3x+5y-w=d, \end{cases}$ (c). $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ bx+y+az=1 \\ x+ay+bz=1 \end{cases}$

（解答）(a) 以下より $y=-3z-w-1$, $x=-5w+1$ が解である（z, w はパラメータ）．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 16 & 2 \\ 3 & -4 & -12 & 11 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -15 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & -30 & -10 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行 }+10\times 2\text{ 行}]{2\text{ 行}/(-5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(b) 以下より，元の連立方程式が解を持つための必要十分条件は，$c=a+b$, $d=a+2b$ であり，このとき解は $y=-3z+5w+b-a$, $x=5z-8w+2a-b$ となる（z, w はパラメータ）．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 1 & -2 & b \\ 2 & 3 & -1 & 1 & c \\ 3 & 5 & 0 & -1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{3\text{ 行}-2\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}}]{2\text{ 行}-1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3 & -5 & b-a \\ 0 & 1 & 3 & -5 & c-2a \\ 0 & 2 & 6 & -10 & d-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{3\text{ 行}-2\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}}]{1\text{ 行}-2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 8 & 2a-b \\ 0 & 1 & 3 & -5 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-2b-a \end{array}\right)$$

(c) まず $\Delta := \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 3ab-a^3-b^3-1 = -(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b)$ であることに注意する．$(a^2+b^2+1-ab-a-b) = ((a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2)/2$ より，$\Delta=0$ であるための必要十分条件は $a+b+1=0$ または $a=b=1$ である（a, b は実数であったことに注意）．

- $\Delta \neq 0$ のとき：方程式の対称性より $x=y=z=\frac{1}{a+b+1}$ を解にもつことは明らかだが，$\Delta \neq 0$ よりこれが唯一の解である．
- $a=b=1$ のとき：このとき与えられた方程式は $x+y+z=1$ と等価なので，解は $x=1-y-z$ となる（y, z はパラメータ）．
- $a+b+1=0$ のとき：与えられた連立方程式をすべて足すと $(a+b+1)(x+y+z)=3$ をえるので，解は存在しない．

（コメント）(c) で $\Delta \neq 0$ のときは，クラメルの公式を用いてもよいでしょう．どちらにせよ，係数行列がパラメータを含んでいる場合，掃出し法は場合分けが煩雑になりがちなので，いきなり掃出し法を適用するのは得策ではありません．この場合，対称性に着目しましょう．

$\boxed{2}$ 以下の行列が逆行列を持つかどうか調べ，持つ場合は逆行列を求めよ．

$$(a).\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b).\ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

（解答）(a) 以下の計算より，逆行列を持ち，それは $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ である．

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2\text{ 行}-2\times 1\text{ 行} \\ 3\text{ 行}-3\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-1\text{ 行}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{ 行}-2\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2\text{ 行}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{ 行}\leftrightarrow 4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{ 行}-2\times 3\text{ 行} \\ 4\text{ 行 }+3\times 3\text{ 行}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2\text{ 行 }+4\text{ 行} \\ 3\text{ 行}-4\text{ 行}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(b) 次ページの計算より，逆行列が存在するための必要十分条件はは $1-4x^2 \neq 0$ であり，このとき逆行列の 4 行目は $\dfrac{1}{1-4x^2}\begin{pmatrix} -x & 2x^2 & -x & 1-2x^2 \end{pmatrix}$ で与えられる．

元の行列の対称性から，全体の逆行列は以下とわかる．

$$\frac{1}{1-4x^2}\begin{pmatrix} 1-2x^2 & -x & 2x^2 & -x \\ -x & 1-2x^2 & -x & 2x^2 \\ 2x^2 & -x & 1-2x^2 & -x \\ -x & 2x^2 & -x & 1-2x^2 \end{pmatrix}$$

（コメント）(b) はパラメータを含むので，余因子行列を使ってもよいでしょう．対称性を考えると，16 個の成分のうち 4 つの成分を決定すればよいです．

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[]{\substack{2\text{ 行}-x\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-x\times 1\text{ 行}}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x^2 & x & -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x^2 & x & 1-x^2 & -x & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[]{\substack{1\text{ 行}-3\text{ 行} \\ 2\text{ 行 }+x\times 3\text{ 行} \\ 4\text{ 行 }+x\times 3\text{ 行}}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 & -x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 1 & -x & 0 & x & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{3\text{ 行}-x\times 2\text{ 行}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 & -x & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1-2x^2 & x & x^2 & -x & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 1 & -x & 0 & x & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{3\text{ 行 }+x\times 4\text{ 行}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 & -x & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 0 & -x & 1 & x \\ 0 & 0 & 2x & 1 & -x & 0 & x & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[]{\substack{1\text{ 行 }+3\text{ 行} \\ 2\text{ 行}-2x\times 3\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2x\times 3\text{ 行}}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2x & 1 & -x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -4x^2 & -x & 1+2x^2 & -x & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 0 & -x & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1-4x^2 & -x & 2x^2 & -x & 1-2x^2 \end{array}\right)
$$

$\boxed{3}$ 以下の行列のランクを求めよ.

$$
\text{(a).}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 5 & -7 & 8 \\ 4 & 19 & -7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & -8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).}\quad \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}
$$

（解答）(a) 以下で最後の行列は階段行列なので（$\circ$ が povot），ランクは 3 である.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 5 & -7 & 8 \\ 4 & 19 & -7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & -8 & 9 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[]{\substack{2\text{ 行 }+2\times 1\text{ 行} \\ 3\text{ 行}-4\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-5\times 1\text{ 行}}}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -9 & 22 \\ 0 & -3 & 7 & -11 & 26 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{2\text{ 列}\leftrightarrow 4\text{ 列}}
\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & -9 & 5 & 11 & 22 \\ 0 & -11 & 7 & -3 & 26 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[]{\substack{3\text{ 行 }+9\times 2\text{ 行} \\ 4\text{ 行 }+11\times 2\text{ 行}}}
\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 74 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 74 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{4\text{ 行}-3\text{ 行}}
\begin{pmatrix} {}^\circ 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & {}^\circ 1 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & {}^\circ -4 & 74 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1 行 +4 行}]{\text{1 行 +2 行}\atop\text{1 行 +3 行}} \begin{pmatrix} 1+3x & 1+3x & 1+3x & 1+3x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行}-x\times\text{1 行}]{\text{2 行}-x\times\text{1 行}\atop\text{3 行}-x\times\text{1 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ より，$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^3(1+3x)$ をえる．よって

- $\Delta \neq 0$ のとき，ランクは 4
- $x = 1$ のとき，ランクは 1
- $x = -1/3$ のとき，ランクは 3（証明：$\Delta = 0$ よりランクは 3 以下であるが，たとえば $\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ という小行列の行列式は $(1+2x^3-3x^2)|_{x=-1/3} \neq 0$ なので，小行列式を用いたランクの特徴づけより少なくとも 3 以上である）

（コメント）行列がパラメータを含む場合は，できるだけ掃出し法を避けるのが賢明です．

$\boxed{4}$ 以下の行列の行列式を求めよ．

$$\text{(a).} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b).} \begin{pmatrix} a & b & a & -b \\ b & a & -b & a \\ a & -b & a & b \\ -b & a & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{(c).} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

（解答）(a) 以下より $\det = 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 64.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行}-2\times\text{1 行}]{\text{2 行 +1 行}\atop\text{3 行}-3\times\text{1 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -13 & -3 \\ 0 & -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行 +2 行}]{\text{3 行 +2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} a & b & a & -b \\ b & a & -b & a \\ a & -b & a & b \\ -b & a & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{4 行 +2 行}]{\text{3 行 +1 行}} \begin{pmatrix} a & b & a & -b \\ b & a & -b & a \\ 2a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a & b & a & -b \\ b & a & -b & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 行}-a\times\text{4 行}-b\times\text{3 行}]{\text{1 行}-a\times\text{3 行}}$

$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ 0 & 0 & -2b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，行列式は $(2a)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & -b \\ 0 & -2b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2a)^2(-4b^2) = -16a^2b^2$ と求まる（第一列での余因子展開も用いた）．

(c) 第 1 列で余因子展開すると

$$
\begin{aligned}
\det &= a\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ -c & b & a \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ d & a & -b \end{vmatrix} \\
&= a(a^3 + a(b^2+c^2+d^2)) - b(-b(a^2+c^2+d^2) - b^3) \\
&\qquad\qquad + c(c^3 + c(a^2+b^2+d^2)) - d(-d(a^2+b^2+c^2) - d^3) \\
&= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\
&= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.
\end{aligned}
$$

（コメント）$n \times n$ 行列 A, B を用いて，$X = \begin{pmatrix} A & \pm B \\ B & A \end{pmatrix}$ と区分けされているからといって $\det X = (\det A)^2 \mp (\det B)^2$ とは限りません．(c) は問題の背後に四元数があります．

$\boxed{5}$ 以下の行列の行列式を求めよ．

$$
\text{(a).}\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b).}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

（解答）(a) 以下より $\det = -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 23 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 23 & -18 \end{vmatrix} = -43$（最初の等号は第 1 列での余因子展開，次の等号は第 3 行での余因子展開による）．ここで $*$ は計算する必要のない数である．

$$
\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\substack{3\text{ 行}-2\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行 }+2\times 1\text{ 行}}]{2\text{ 行 }+3\times 1\text{ 行}}
\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[3\text{ 列}-3\times 4\text{ 列}]{2\text{ 列 }+3\times 4\text{ 列}}
\begin{pmatrix} -1 & * & * & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 23 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

（解答）(b) 以下より $\det = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$（最初の等号は第 1 行での余因子展開，次の等号も第 1 行での余因子展開による）．

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\xrightarrow{3\text{ 列 }+2\times 2\text{ 列}}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}
\xrightarrow{1\text{ 列 }+4\text{ 列}}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.
$$

（コメント）行・列基本変形を用いて，0 をたくさんつくると計算が楽になります．

$\boxed{6}$ $x_1 \sim x_5$ を未知変数とする以下の連立方程式を解け．(b) では，解を持つための定数 a の条件を求め，その条件下で解を求めよ．ただし，変数・パラメータ共に実数の範囲を考える．

$$\text{(a).}\quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_4-x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_5=5 \\ -2x_1-4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=3 \\ -3x_1-6x_2+2x_3-3x_4+5x_5=2, \end{cases} \qquad \text{(b).}\quad \begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=a \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=1 \\ x_1-4x_3+5x_4=3. \end{cases}$$

（解答）(b) 以下より $a=3$ が解を持つ条件で，このとき $x_2=-x_3+3x_4-1, x_1=4x_3-5x_4+3$．まとめると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & a \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行}\leftrightarrow 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}-2\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}-1\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -9 & a-6 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行}-3\times 2\text{ 行}]{2\text{ 行}/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right).$$

（解答）(a) 以下より $x_4=1+2x_5, x_3=4-x_5, x_1=1-x_5-2x_2$．まとめると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -3 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2\text{ 行}-1\times 1\text{ 行} \\ 3\text{ 行}+2\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}+3\times 1\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3\text{ 行}-2\times 2\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\text{ 行}-2\times 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2\text{ 行}+1\times 3\text{ 行} \\ 1\text{ 行}-1\times 3\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\boxed{8}$　2 つの実パラメータ α, β を含む ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ に関する以下の連立方程式を考える．

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 1-\alpha & -2 & -7-\alpha & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & 2+\alpha & 4 & 5+\alpha+\beta & -9 \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5-\alpha-3\beta \\ -2 \\ 2+2\alpha+2\beta \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a)　解が存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ．

(b)　解がただ 1 つ存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ．

(c)　$\alpha = \beta = 1$ は (b) の条件を満たす．$\alpha = \beta = 1$ のとき，解 ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ を求めよ．

（解答）拡大係数行列に行基本変形を施すと

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ -6 & 1-\alpha & -2 & -7-\alpha & 5 & -5-\alpha-3\beta \\ -3 & 0 & -2 & -5 & 6 & -2 \\ 3 & 2+\alpha & 4 & 5+\alpha+\beta & -9 & 2+2\alpha+2\beta \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2\text{ 行 }+1\text{ 行}\times 2 \\ 3\text{ 行 }+1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-1\text{ 行} \\ 5\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1-\alpha & -2 & -3-\alpha & 7 & 1-\alpha-3\beta \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 3+\alpha & 4 & 3+\alpha+\beta & -10 & -1+2\alpha+2\beta \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行を並びかえ}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & -2 & -3-\alpha & 7 & 1-\alpha-3\beta \\ 0 & 3+\alpha & 4 & 3+\alpha+\beta & -10 & -1+2\alpha+2\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{5\text{ 行}-3\text{ 行 }+4\text{ 行} \\ 3\text{ 行 }+2\text{ 行}\times 2 \\ 4\text{ 行}-2\text{ 行}\times(1+\alpha) \\ 5\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 2\alpha & -7\alpha & -2\alpha-3\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha-\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\text{ 行 }+3\text{ 行}\times\alpha} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha & 4\alpha & -3\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha-\beta \end{array}\right)$$

をえる．これより，与連立方程式が解をもつ（resp. ただ 1 つの解をもつ）必要十分条件は

$$\begin{pmatrix} -4\alpha & 4\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} \tag{1}$$

が解をもつ（resp. ただ 1 つの解をもつ）ことである．

(a), (b) $\alpha\beta \neq 0$ ならば (1) はただ 1 つの解をもつ．$\alpha = 0$（resp. $\beta = 0$）で (1) が解をもつためには $-3\beta = 0$（resp. $\alpha - \beta = 0$）が必要である．ようするに $\alpha\beta = 0$ で (1) が解をもつとすると，$\alpha = \beta = 0$ でなければならないが，このとき任意の ${}^t(x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$ が (1) をみたす．まとめると，与連立方程式に，解が存在する必要十分条件は $\alpha\beta \neq 0$ または $\alpha = \beta = 0$ で，ただ 1 つ解が存在する必要十分条件は $\alpha\beta \neq 0$ である．

(c) 後退代入を行うため，さらに行基本変形を続けると

$$\xrightarrow[1\text{ 行}-2\text{ 行}]{2\text{ 行}-3\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha & 4\alpha & -3\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha - \beta \end{array}\right)$$

となるので，$x_3 = -3x_4 + (11/2)x_5 - 1, x_2 = 3x_4 - 4x_5 + 1, x_1 = (1/3)x_4 - (5/3)x_5 + 4/3$ がえられる．$\alpha = \beta = 1$ のとき，(1) の解は $x_4 = 0, x_5 = -3/4$ なので，代入すると $x_1 = 31/12, x_2 = 4, x_3 = -41/8$ となる（注：代入して確認できるので，試験では検算してみるべきです）．

$\boxed{7}$ a を複素数とし

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

とおく．$\operatorname{rank} A_1$ を求めよ．

（解答）以下より $a(a-1) = 0$ なら $\operatorname{rank} A_1 = 3$ で，それ以外なら $\operatorname{rank} A_1 = 4$ である．

$$A_1 \xrightarrow{3\text{ 行}-4\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[+3\text{ 行}\times(1-a)]{4\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a(a-1) \end{pmatrix}.$$