A1 2×2の可逆行列Pで

$P^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ となるものが存在したとする。

両辺を2乗すると $P^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2P=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}$ となるが、$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ より

$\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ つまり $\lambda_1=\lambda_2=0$ が得られる。

すると $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ となって矛盾が生じた。

A2 (a) 固有多項式は $\begin{vmatrix}t-1&-2\\1&t-4\end{vmatrix}=(t-1)(t-4)+2=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

なので、$\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$ の固有値は、これの解の $t=2,3$ である。

(b) 固有多項式は $\begin{vmatrix}t-6&3&7\\1&t-2&-1\\-5&3&t+6\end{vmatrix}=(t-6)(t+6)(t-2)+15+21+35(t-2)+3(t-6)-3(t+6)$

$=(t^2-36)(t-2)+35t-70$

$=t^3-2t^2-t+2=(t-2)(t^2-1)$

なので固有値は $t=2,\pm1$

(c) 固有多項式は $\begin{vmatrix}t-2&1&-1\\0&t-1&-1\\1&-1&t-1\end{vmatrix}=(t-2)(t-1)^2-1+(t-1)-(t-2)$

$=(t-2)(t-1)^2$ より固有値は $t=2,\cancel{\pm}1$

A3 (a) • $t=2$ のとき $\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を解くと $\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)-(1行)}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ よって固有値2の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

• $t=3$ のとき $\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を解くと $\left(\begin{array}{cc|c}2&-2&0\\1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(1行)}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\2&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)-(1行)\times2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値3の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

(b) • $t=2$ のとき $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$\left(\begin{array}{ccc|c}-4&3&7&0\\1&0&-1&0\\-5&3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\-4&3&7&0\\-5&3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\-4&3&7&0\\-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[(3行)+(1行)]{(2行)+(1行)\cdot4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値2の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

• $t=1$ のとき $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$\left(\begin{array}{ccc|c}-5&3&7&0\\1&-1&-1&0\\-5&3&7&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}-5&3&7&0\\1&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\-5&3&7&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)+(1行)\times5}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&-2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値1の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

• $t=-1$ のとき $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$\left(\begin{array}{ccc|c}-7&3&7&0\\1&-3&-1&0\\-5&3&5&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)\to(2行)\to(1行)\to(3行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\-5&3&5&0\\-7&3&7&0\end{array}\right)\xrightarrow[(3行)+(1行)\cdot7]{(2行)+(1行)\cdot5}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\0&-12&0&0\\0&-18&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(2行)\cdot\frac{3}{2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\0&-12&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ よって固有値-1の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

(c) <u>t=2のとき</u> $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)-(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)\leftrightarrow(1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値2の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

<u>t=1のとき</u> $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-1&0\\1&-1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)+(1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ よって固有値1の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

$\boxed{A4}$ (a) 固有値2の固有空間は $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ を基底にもち、1次元

〃 3 〃 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 〃 1 〃

合計が $\dim\mathbb{C}^2=2$ と等しいので、$\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$ は対角化可能である

(b) 固有値2の固有空間は $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ を基底にもち、1次元

〃 1 〃 $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ 〃 1 〃

〃 −1 〃 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 〃 1 〃

合計が $\dim\mathbb{C}^3=3$ と等しいので、$\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\ \cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}$ は対角化可能である。

(c) 固有値1の固有空間は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を基底にもち、1次元で

これは固有多項式の解 t=1 の重複度2より真に小さい。

よって $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ は対角化不可能である。

$\boxed{A5}$ (a) $P=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ (b) $P=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{A6}$ (a) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ (b) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$\boxed{X1}$

$$\begin{pmatrix}2&4&1&-3\\0&1&-2&1\\1&0&2&-3\\1&0&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[(4行)-(3行)\times1]{(1行)-(3行)\times2}\begin{pmatrix}0&4&-3&3\\0&1&-2&1\\1&0&2&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

右の行列を第1列で余因子展開すると $\begin{vmatrix}0&4&-3&3\\0&1&-2&1\\1&0&2&-3\\0&0&1&1\end{vmatrix}=+1\cdot\begin{vmatrix}4&-3&3\\1&-2&1\\0&1&1\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}4&-3&3\\1&-2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-8+0+3-0-4+3=-6$ より求める行列式は -6

$\boxed{X2}$ 拡大係数行列に掃き出し法を適用して階段行列に変形する:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3&7&-4&-18\\2&-5&3&11\\1&-3&2&4\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(3行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&4\\2&-5&3&11\\-3&7&-4&-18\end{array}\right)\xrightarrow[(3行)+(1行)\times3]{(2行)-(1行)\times2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&4\\0&1&-1&3\\0&-2&2&-6\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)+(2行)\times2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&2&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

与えられた連立方程式と同値な最右辺(の拡大係数行列に対応する)連立方程式を逆向きに解くと、$y=z+3$, $x=3y-2z+4=z+13$

よって求める解は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\3\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (sはパラメータ)

A7 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} t-2 & 1 & -a \\ 1 & t-2 & -a \\ 1 & -1 & t-(a+2) \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-(a+2)) - a + a + a(t-2) - a(t-2) - (t-(a+2))$$

$$= (t-(a+2))(t-3)(t-1)$$

- まず $a \neq \pm 1$ ならば、固有値は3つあるので、授業ノート13ページ系8によって対角化可能である。

(※2は固有多項式の $a=1$ のときの解 $t=3$ の重複度)

- $a=1$ のとき、固有値3の固有空間が2次元 $\Longleftrightarrow$ 対角化可能だが、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)-(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より固有空間の次元は1次元なので、対角化不可能である。

- $a=-1$ のとき、固有値1の固有空間が2次元 $\Longleftrightarrow$ 対角化可能だが、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)+(1行)]{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)-(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より固有空間の次元は1次元なので、対角化不可能である。

B1 $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ であった。よって $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$ であり

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}\cdot\frac{1}{n!} = P\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

(これをさらに展開してもよい)

B2 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ であった。よって $A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}$

(これをさらに展開してもよい)

B3 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ より $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ が成り立つ。$(n \geq 0)$

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ について $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ だったから $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

よって

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6a_0-5a_1+a_2 \\ -6a_0+8a_1-2a_2 \\ 2a_0-3a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6a_0-5a_1+a_2 \\ 2^n(-6a_0+8a_1-2a_2) \\ 3^n(2a_0-3a_1+a_2) \end{pmatrix}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}\left(1\cdot(6a_0-5a_1+a_2) + 1\cdot 2^n(-6a_0+8a_1-2a_2) + 1\cdot 3^n(2a_0-3a_1+a_2)\right)$$

$$= (3-3\cdot 2^n + 3^n)a_0 + \left(-\frac{5}{2}+4\cdot 2^n-\frac{3}{2}3^n\right)a_1 + \left(\frac{1}{2}-2^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n\right)a_2$$

注 行列積は結合則を満たすので、どの順に計算してもよいが、この場合右から計算すると、常に(行列)(列ベクトル)の計算をしていて、計算量が少なくなる

B4 $\begin{pmatrix} p_A(t+1) \\ p_B(t+1) \\ p_C(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_A(t) \\ p_B(t) \\ p_C(t) \end{pmatrix}$ より、$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} p_A(t) \\ p_B(t) \\ p_C(t) \end{pmatrix} = A^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

が成り立つ$(t \geq 0)$。今、$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{pmatrix} p_A(t) \\ p_B(t) \\ p_C(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^t & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^t & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -(-\frac{1}{2})^t \\ -(-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-\frac{1}{2})^t \\ 1-(-\frac{1}{2})^t \\ 1-(-\frac{1}{2})^t \end{pmatrix}$$