

平成 25 年度 国立東京工業高等専門学校物質工学科 卒業論文

磁気浮上のメカニズム解析

安田 健人

指導教員:土屋賢一

平成 26 年 2 月 12 日

Mechanism of Magnetic Levitation

Kento Yasuda

Tokyo National College of Technology

Abstract

When a material is in the state of superconductivity, magnetic field is excluded from the bulk. This phenomenon, which is called Meissner effect, causes magnetic levitation. In this study, we analyze mechanism of magnetic levitation by using London equation, Biot-Savart law in electromagnetism and classical mechanics. As a result, the floating height of an infinitely-long magnet on an infinitely-long cylindrical superconductor. For example, the floating height of a magnet with a mass density of 0.2kg/m is 0.0238m on the cylindrical superconductor whose radius and penetration depth of magnetic field are 0.0001m and 0.01m , respectively. This is consistent with the experimental result for the finite size superconductor. Applying this method, we can investigate the relation between the shape of the superconductor and Meissner effect.

目次

第一章	序論	1
1.1	超伝導の歴史	1
1.2	磁気浮上とその応用	1
1.3	本研究の目的	2
第二章	理論	3
2.1	ベクトル解析	3
2.1.1	座標系と単位ベクトル	
2.1.2	ベクトルの内積	
2.1.3	ベクトルの外積	
2.1.4	ナブラとラプラシアン	
2.1.5	ベクトル場の発散	
2.1.6	ベクトル場の回転	
2.2	電磁気学	8
2.2.1	マクスウェルの方程式	
2.2.2	ビオ・サバールの法則	
2.2.3	アンペールの法則	
2.2.4	ローレンツ力	
2.2.5	磁場に対するクーロンの法則と磁気双極子	
2.3	ロンドン方程式	11
2.3.1	導出	
2.3.2	無限に厚い無限平面超伝導体	
2.3.3	無限平板超伝導体	
2.3.4	無限円柱超伝導体	
2.4	逐次代入法	21
2.5	ニュートン法	22
2.6	差分法	24
2.7	ガウス・ザイデルの反復法	27
2.8	数値積分	27
第三章	計算手法	31
3.1	重力とローレンツ力の釣合	31
3.2	境界条件	33
3.3	差分法によるロンドン方程式の解法	32
3.4	ビオ・サバールの法則の変形	35
3.5	二重指数関数型数値積分法によるビオ・サバールの法則の計算	39
3.6	浮上位置の計算アルゴリズム	41

第四章	磁石の浮上位置測定	43
	4.1 超伝導体の作成	43
	4.2 浮上位置の測定	43
第五章	結果と考察	44
	5.1 ロンドン方程式の差分解	44
	5.1.1 無限平面版超伝導体	
	5.1.2 無限円柱超伝導体	
	5.2 二重指数関数法による異常積分の計算	48
	5.3 ビオ・サバールの法則による円柱電流周りの磁場計算	49
	5.4 無限円柱型超伝導体を含む電磁場の解析	50
	5.5 無限円柱型超伝導体上の磁石の浮上位置	55
	5.5.1 浮上位置	
	5.5.2 質量と浮上位置の関係	
第六章	結論	63
	謝辞	63
	付録	64
	プログラムとその解説	

第一章 序論

1.1 超伝導の歴史

1908年、Kamerlingh-Onnes がヘリウムの液化に成功した。これにより極低温での実験が可能となり、1911年 Onnes は水銀の電気抵抗が 4.2K 以下で 0 になることを発見した。この現象を超伝導と名付けた。その後の実験により、水銀以外のどのような遷移金属でも固有の温度以下で超伝導を示すことがわかった^{[1-1][1-2]}。

しばらくの間、超伝導の電氣的性質は単に電気抵抗率が 0 である完全電気伝導体であると考えられていた。しかし、1933年 Meissner と Ochsenfeld により超伝導体内部の磁束密度が 0 になることが発見された。この超伝導の完全反磁性を Meissner 効果と呼ぶ。1935年 London 兄弟により Meissner 効果を説明する London 方程式が示された。London 方程式により、超伝導体表面から深さ λ (磁場侵入長)程度までは磁束密度が侵入していることが示された^[1-1]。

Meissner 効果をわかりやすく示すものに磁気浮上がある。超伝導体の上に磁石を乗せると磁石が浮く。これは超伝導体は磁石による磁場を排除するため、磁石と超伝導体の間に磁気圧力が働く。磁石の重力と磁気圧力が釣り合い、磁石は浮く^[1-3]。

1986年、Bednorz と Müller により高温超伝導体が発見された。彼らは Cu を含む La と Ba の酸化物の電気抵抗が 30K 付近で 0 になることを発見した。これを受け Tanaka がこの超伝導体が $(La_{1-x}Ba_x)_2CuO_{4-\delta}$ でマイスナー効果を示すことを確認した。これにより、超伝導の研究は盛んになり、1987年には Chu によって 90K を超える超伝導体が発見された。これは液体窒素温度(77K)を超えるものである^{[1-3][1-4]}。

参考文献

- [1-1] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 東京電機大学出版(2002) p.1~4
- [1-2] 渋谷寿 超伝導はおもしろい! オーム社(1998) p.12
- [1-3] 御子柴宣夫、鈴木克生 超伝導物理入門 培風館(1995) p1~7,37~39
- [1-4] 大沼俊朗 超伝導電磁気学 コロナ社(1995) p.10

1.2 磁気浮上とその応用

磁気浮上は磁力のみで物体が重力と釣り合う位置に浮上することをいう。磁気浮上は超伝導体は示すマイスナー効果に伴った性質の一つである。もっとも簡単に超伝導体の磁気浮上を観測できる実験として浮き磁石がある。超伝導体の上に磁石を乗せると、磁石は超伝導体から浮かび上がり静止する。この浮き磁石はその簡便さから超伝導のデモンストレーションなどでよくおこなわれる。

磁気浮上は応用上でも有用で超伝導型磁気軸受や免震装置などに応用される。超伝導型磁気軸受は超伝導体の磁気浮上の性質を用いることで非接触型の軸受となる。そのため、超伝導型磁気軸受は摩擦によるエネルギー損失がない。そこでフライホイール蓄電装置に用いられる。フライホイール蓄電装置は

電力をホイール回転の運動エネルギーとして蓄える装置である。これに超伝導型磁気軸受を用いることでエネルギーの損失を抑えることが期待されている^[1-5]。また、免震装置に超伝導の磁気浮上を用いて建造物と地面を絶縁させることで振動を軽減できると考えられ研究されている^[1-6]。

参考文献

[1-5] 服部博之 東京大学大学院新領域創成科学研究科基盤科学研究系先端エネルギー工学専攻修士論文 フライホイールエネルギー貯蔵装置用超伝導スラスト軸受の回転損失解析 2007

[1-6] 佐々木修平 第82回2010年度春季低温工学・超電導学会講演概要集 p136 超伝導免震装置における振動伝達特性と減衰特性 2010

1.3 本研究の目的

本研究では超伝導上の磁石の浮上位置をコンピュータにより計算することを目的とした。このことにより磁気浮上の応用分野において基本的かつ重要な結果を得ることができると考えた。

しかし、超伝導の文献に磁気浮上の原理について記されているものは少ない。しかも、定量的な記述は全くない。そこで、磁気浮上の理論を構築することも本実験の目的の一つとした。

また、本研究では無限円柱状超伝導体を中心に研究を行った。無限円柱状超伝導体に一様な外部磁場を加えたときの電磁場は解析的に解かれているおり、計算結果の整合性を考えるために超伝導体の形状を絞って研究を行った。

よって、本研究の目的は以下の三つとする。

- (i) 超伝導体の磁気浮上の理論を構築し、計算手法をを考案する。
- (ii) 無限円柱状超伝導体に一様な磁場を加えたときの電磁場を計算し、解析解と比較し考察する。
- (iii) 無限円柱状超伝導体上の磁石の浮上位置を様々な条件で計算し、その結果を考察する。

また、本論文の構成は次のようになっている。第一章では本研究の序論、第2章では本研究に用いた理論を述べる。第3章では磁気浮上とシミュレーションの理論の構築と計算手法の説明を行う。第四章では磁石の浮上位置の測定結果を示す。第5章では数値計算の結果を示す。第6章は本論文の結論となっている。

第二章 理論

本研究は超伝導体の磁気浮上の理論の構築を一つの目的としている。そのため電磁気学やベクトル解析などの理論の十分な理解が必要である。また、コンピュータシミュレーションに用いられる差分方程式や数値積分の理論についても知っておく必要がある。

この章では本研究に用いた理論について述べる。

2.1 ベクトル解析

超伝導体を含む電磁場の解析にはベクトル解析の知識が必要となる。以下に本研究で用いたベクトル解析について述べる。

2.1.1 座標系と単位ベクトル

よく用いられる座標系としてデカルト座標系、円筒座標系、極座標系があげられる。これらの座標系の特性と単位ベクトルについて述べる。

デカルト座標系はもっとも基本的な座標系として知られている。 x, y, z の三成分によって図 2.1 のように表現される。

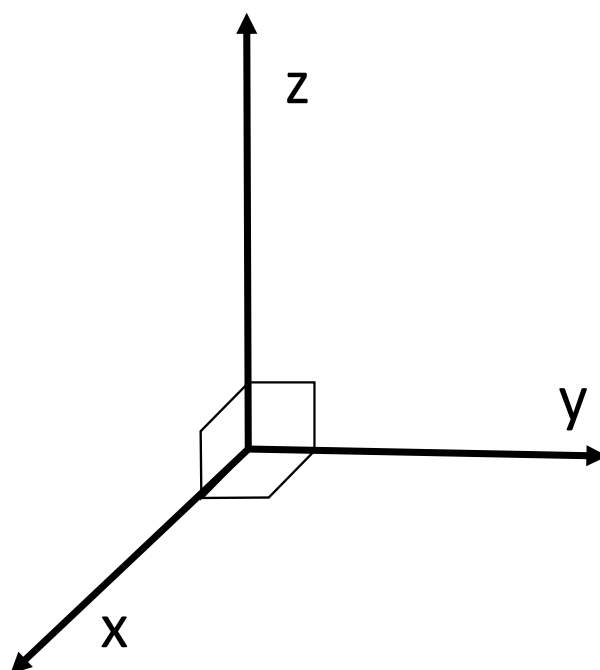


図 2.1 デカルト座標系

デカルト座標系における x, y, z 方向の単位ベクトルはそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ のように書ける。

円筒座標系は中心軸からの距離 ρ 、角度 φ 、高さ z によって表現される正規直行座標系である。

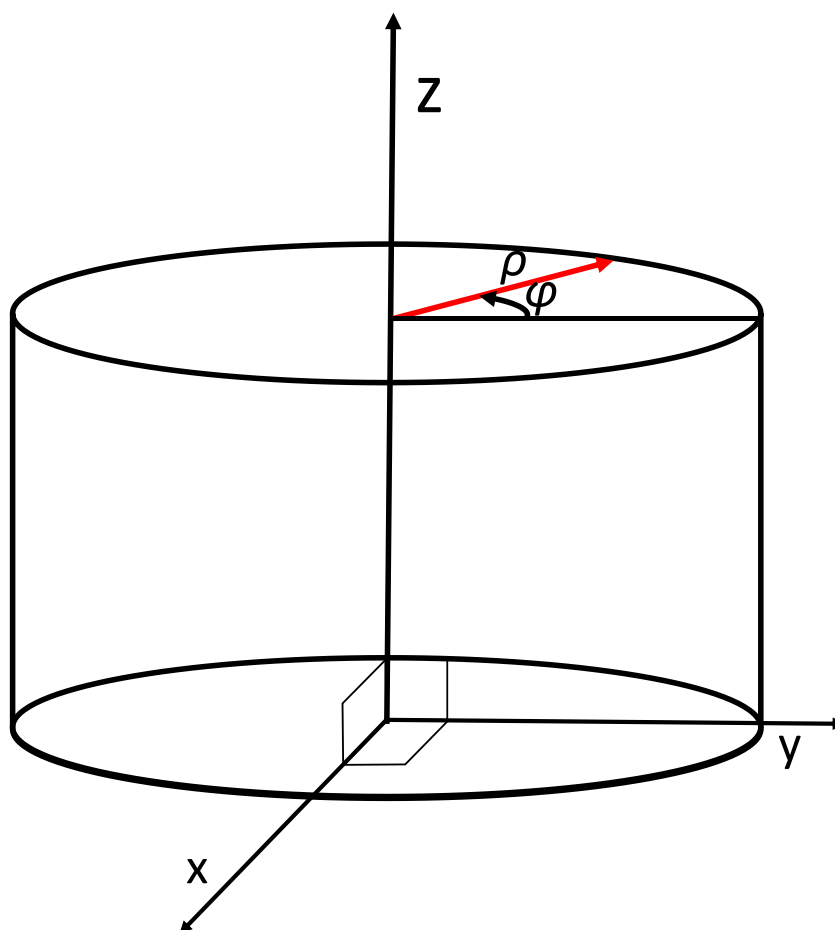


図 2.2 円筒座標系

デカルト座標系との関係は次に示すとおりである。

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (2.1.1)$$

円筒座標系における ρ, φ, z 方向の単位ベクトルはそれぞれ $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ のように書けるが、重要なことは $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ は φ によって変化する。したがって、 $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ を φ の関数とみなし $\mathbf{e}_\rho(\varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ と書くことにする。

極座標系は原点からの距離 r 、 z 軸からの角度 θ 、 x 軸からの角度 φ によって表現される正規直行座標系である。

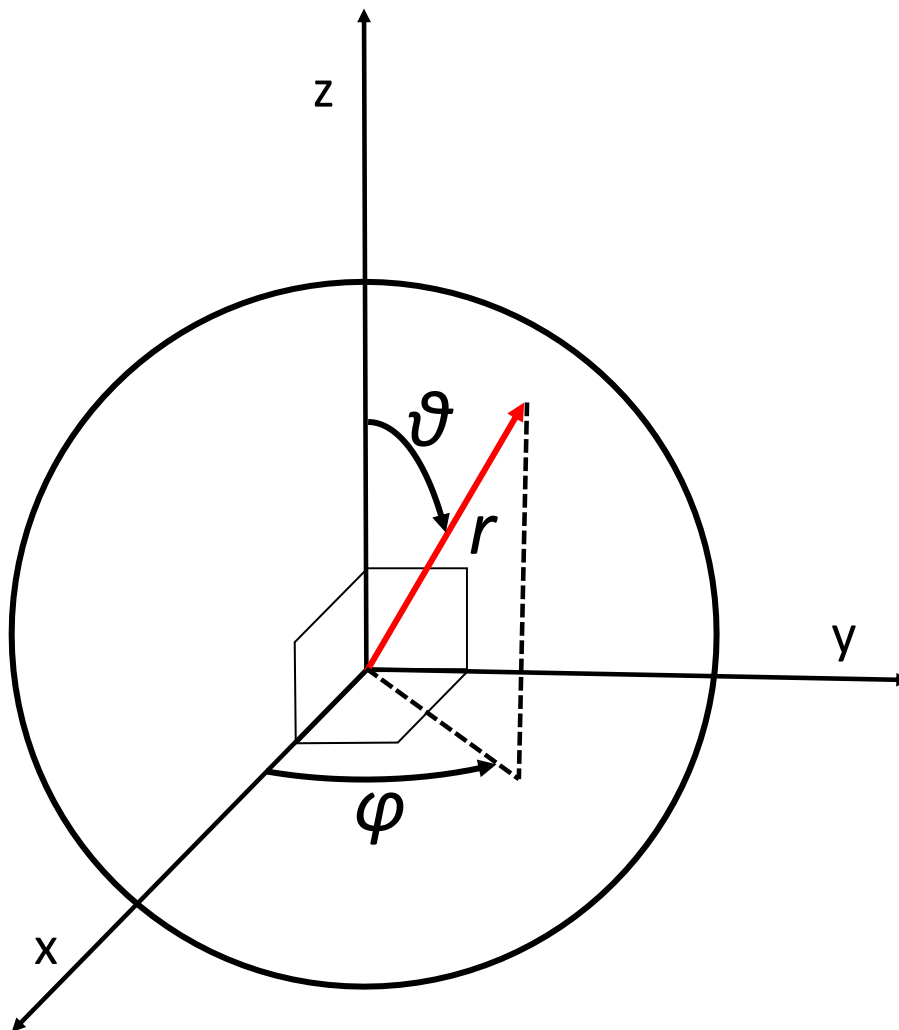


図 2.3 極座標系

デカルト座標系との関係は

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.1.2)$$

極座標系における r, θ, φ 方向の単位ベクトルはそれぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ のように書けるが、重要なことはこれらの単位ベクトルは θ, φ によって変化する。したがって、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ を θ, φ の関数とみなし $\mathbf{e}_r(\theta, \varphi), \mathbf{e}_\theta(\theta, \varphi), \mathbf{e}_\varphi(\theta, \varphi)$ と書くことにする。

また、一般的な三次元正規直行座標系における単位ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とする。

2.1.2 ベクトルの内積

ベクトル $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ と $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$ の内積は次のように定義される。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2.1.3)$$

ここで θ はベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} のなす角である。ベクトルの内積はスカラー量となる。そのためスカラー積とも呼ばれる。また、成分表示を用いて示すと以下のように書ける。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.1.4)$$

単位ベクトルとの内積は単位ベクトル方向の射影となる。

2.1.3 ベクトルの外積

ベクトル $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ と $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$ の外積は次のように定義される。

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.1.6)$$

ここで θ はベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} のなす角である。また、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, \mathbf{a} , \mathbf{b} の方向関係については図 2.4 に示す。

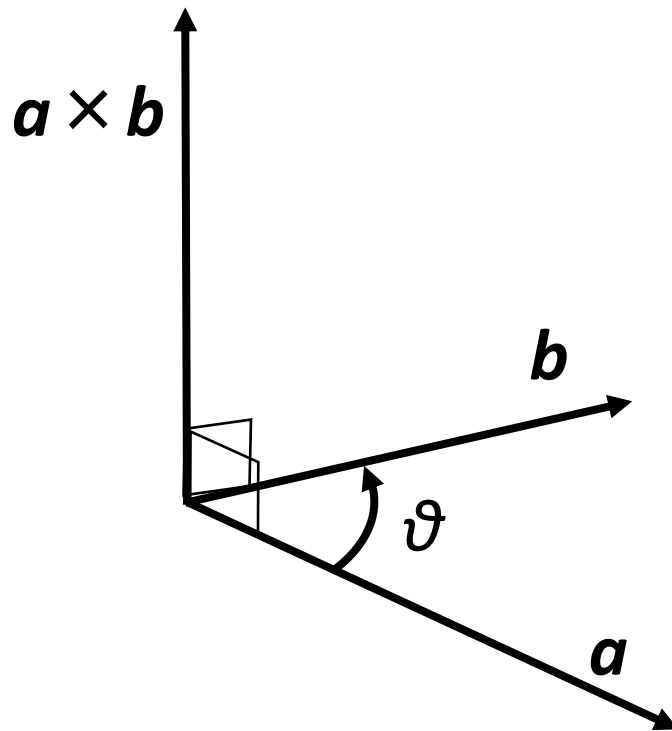


図 2.4 ベクトルの外積

外積の大きさはそれらのベクトルが作る平行四辺形の面積となる。

2.1.4 ナブラとラプラシアン

∇ はナブラといいベクトル解析の基本的な演算子である。それぞれの座標系におけるナブラを以下に示す。

デカルト座標系

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1.7)$$

円筒座標系

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1.8)$$

極座標系

$$\nabla = \mathbf{e}_r(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta(\theta, \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi(\theta, \varphi) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.1.9)$$

また、 ∇^2 はラプラシアンと呼ばれ、 Δ とも書く。それぞれの座標系におけるラプラシアンを以下に示す。

デカルト座標系

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.1.10)$$

円筒座標系

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.1.11)$$

極座標系

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.1.12)$$

2.1.5 ベクトル場の発散

ベクトル場 \mathbf{A} の発散はそれぞれの座標系で次のように定義される。

デカルト座標系

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.1.13)$$

円筒座標系

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (2.1.14)$$

極座標系

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \quad (2.1.15)$$

ベクトル場 \mathbf{A} の発散はその点におけるベクトル場 \mathbf{A} の流出量を示す。

2.1.6 ベクトル場の回転

ベクトル場 \mathbf{A} の回転はそれぞれの座標系で次のように定義される。

デカルト座標系

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.1.16)$$

円筒座標系

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho(\varphi) + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.1.17)$$

極座標系

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r(\theta, \varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta(\theta, \varphi) \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

ベクトル場 \mathbf{A} の回転はその点におけるベクトル場 \mathbf{A} の回転の程度を示す。

[2-1]

参考文献

[2-1] 小林亮、高橋大輔 ベクトル解析入門 東京大学出版(2003)

2.2 電磁気学

超伝導を含む電磁場も一部を除き一般的な電磁気学の法則にしたがう。本研究に用いた電磁気学の法則について述べる。

2.2.1 マクスウェルの方程式[2-2]

マクスウェルの方程式はマクスウェル(J.C.Maxwell,1857-1879)が電磁気学の法則を4つの方程式にまとめたもので電磁気学の基礎方程式となっている。以下にマクスウェルの方程式を示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.4)$$

(2.2.1)式は電束密度 $\mathbf{D}[C/m^2]$ についてのガウスの法則で電荷 $\rho[C]$ による電束密度の生成を示す。(2.2.2)式はストークスの定理で磁束密度 $\mathbf{B}[T]$ の変化により電場 $\mathbf{E}[V/m]$ が生成することを示す。つまり、電磁誘導を示す。(2.2.3)式は磁束密度 \mathbf{B} についてのガウスの法則で磁束密度の発散がないことを示す。(2.2.4)式はアンペールの法則で電流密度 $\mathbf{J}[A/m^2]$ と電束密度 \mathbf{D} の変化によって発生する磁場 $\mathbf{H}[A/m]$ を示す。

また、マクスウェルの補助方程式として次の二つがある。

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.6)$$

ここで ε は誘電率、 μ は透磁率を示す。これらの真空中での値は次のようになる。

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} [F/m] \quad (2.2.7)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m] = 1.257 \times 10^{-6} [H/m] \quad (2.2.8)$$

これらのマクスウェルの方程式を連立微分方程式として解くことで電磁場解析ができる。

2.2.2 ビオ・サバールの法則

ビオ・サバールの法則は電流の作る磁場の式である。これはマクスウェルの方程式の定常状態における(2.2.4)式と同じ意味を持つ。この法則は1820年にフランスのビオとサバールが発見した法則である^[2-3]。この法則を用いることで電流の様子が与えられれば、どんな場合でも磁場を求められる。このことから、ビオ・サバールの法則は数値計算に向いているといえる^[2-3]。ビオ・サバールの法則を以下に示す。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \oint_l \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.2.9)$$

ビオ・サバールの法則は電流素片 $I d\mathbf{r}'$ と相対位置 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の外積を取ったものを線積分すると電流が作る磁場を求めることができる。

ビオ・サバールの法則は電流密度 \mathbf{J} を用いた式に拡張することも可能である^[2-4]。拡張した式を次に示す。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'^3 \quad (2.2.10)$$

拡張した式から磁場を求めるには電流密度 \mathbf{J} と相対位置 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の外積を取ったものを体積積分する必要がある。

2.2.3 アンペールの法則

アンペールの法則も電流の作る磁場の法則であって、マクスウェルの方程式の(2.2.4)式の積分形ともいわれる。

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2.11)$$

アンペールの法則はある閉曲線に沿って磁場 \mathbf{H} を線積分すると閉曲線を通り抜ける電流密度 \mathbf{J} の面積積分になることを意味している。

アンペールの法則は電流分布の対称性がいいとき解析的に解ける。その例として半径 a の円柱状導体を一様な電流密度 \mathbf{J} が流れているときの周りの磁場を考える。まず、円筒座標を用いて電流密度の方向に z 軸を取る。すると、対称性を考えると次が言える。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(\rho) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \quad (2.2.12)$$

また次も成り立つ。

$$d\mathbf{r} = \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \quad (2.2.13)$$

するとアンペールの法則の左辺は次のようになる。

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_l H(\rho) \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = H(\rho) \rho \oint_l d\varphi = 2\pi H(\rho) \rho \quad (2.2.14)$$

ここで $\rho \leq a$ の時を考えるとアンペールの法則の右辺は次のようになる。

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S J \mathbf{e}_z \cdot dS \mathbf{e}_z = J \int_S dS = J \pi \rho^2 \quad (2.2.15)$$

したがって方程式は次のように解ける。

$$2\pi H(\rho)\rho = J\pi\rho^2 \quad (2.2.16)$$

$$H(\rho) = \frac{J\rho}{2} \quad (2.2.17)$$

次に $\rho > a$ の時を考えるとアンペールの法則の右辺は次のようになる。

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S J\mathbf{e}_z \cdot dS\mathbf{e}_z = J \int_S dS = J\pi a^2 \quad (2.2.18)$$

したがって方程式は次のように解ける。

$$2\pi H(\rho)\rho = J\pi a^2 \quad (2.2.19)$$

$$H(\rho) = \frac{Ja^2}{2\rho} \quad (2.2.20)$$

2.2.4 ローレンツ力

一般的に電荷 q を持つ粒子が電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} の中を速度 \mathbf{v} で運動しているとき受けるローレンツ力は次のように書ける。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.2.21)$$

電場が存在しない場合は次のようになる。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.2.22)$$

電流が受けるローレンツ力は

$$\mathbf{F} = \oint_l Ids \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.2.23)$$

のように書け、電流密度が受けるローレンツ力は次のようにかける^[2-4]。

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3 \quad (2.2.24)$$

2.2.5 磁場に対するクーロンの法則と磁気双極子^[2-5]

磁場に対するクーロンの法則を以下に示す。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m (\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^3} \quad (2.2.25)$$

この式は磁荷 $m[A \cdot m]$ を持つ磁極が位置 \mathbf{r} に作る磁束密度を示す。 \mathbf{r}_m は磁極の位置を示している。

磁気双極子とは大きさが同じで符号が異なる磁荷を持つ二つの磁極のことである。磁気双極子は磁石が作る磁束密度を近似することができる。磁気双極子が作る磁束密度は磁場に対するクーロンの法則から次のようになる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m1})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m1}|^3} - \frac{\mu_0 m (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m2})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{m2}|^3} \quad (2.2.26)$$

[2-1]

参考文献

[2-2] 兵頭俊夫 裳華房テキストシリーズ物理学 電磁気学 裳華房(2011)

[2-3] 霜田光一 電磁気ハンドブック 聖文社(1993) p96,98

[2-4] 前田三男 電磁気学の基礎 昭晃堂(1991) p97,98

[2-5] 永田一清 ライブラリ工学基礎物理学 2 基礎電磁気学 サイエンス社(1989) p.72

2.3 ロンドン方程式

1936年、ロンドン兄弟は超伝導に対する基礎式ロンドン方程式を導き、マイスナー効果の説明に成功した。超伝導の仕組みについては多くの学者が研究していたが、解明されていなかった。ロンドン方程式はマイスナー効果の現象論で、マクスウェルの方程式と二流体理論を組み合わせたものである^[2-6]。二流体理論とは、超伝導体内の電子が電気抵抗を受けない超伝導電子と電気抵抗を受ける常伝導電子の二つに分かれて存在すると仮定し、超伝導を説明する理論である。ロンドン方程式は超伝導内部の電磁場を解としていて、本研究においても重要な位置を占める方程式である。しかし、超伝導外部の電磁界について求めることができない。

2.3.1 導出

超伝導電子の運動方程式は

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla P}{n} - m\nu\mathbf{v} \quad (2.3.1.1)$$

のように書ける。ここで、 m は質量[kg]、 \mathbf{v} は速度[m/s]、 q は電荷[C]、 \mathbf{E} は電界[V/m]、 \mathbf{B} は磁束密度[T]、 P は圧力[Pa]、 n は密度[m⁻³]、 ν は衝突周波数[Hz]とした。衝突周波数とは1電子が単位時間あたりに原子に衝突する回数のことである。ここで、磁場がなく、また電気抵抗もない場合を考えると、運動方程式は

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q\mathbf{E} \quad (2.3.1.2)$$

と書ける。ここで電流密度は $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = nq\mathbf{v}$ と表されるので、

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E} \quad (2.3.1.3)$$

が成り立つ。さらに、 $\lambda^2 = \frac{1}{\omega_p^2 \epsilon_0 \mu_0}$ 、 $\omega_p^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0}$ を用いて置きなおすと次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{E} \quad (2.3.1.4)$$

これをロンドンの第1式という。

さらに式を変形し、ロンドンの第2式を導出する。まず、マクスウェルの方程式(2.2.2)より、ロンドンの第1式は

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3.1.5)$$

のように表される。この式の両辺を t で積分すると

$$\nabla \times \mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B} + C \quad (2.3.1.6)$$

を得る。ここで、積分定数 C を 0 とすると

$$\nabla \times \mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B} \quad (2.3.1.7)$$

のようなロンドンの第二式が求まる。

ここで、マクスウェルの方程式(2.2.4)と(2.2.6)を用いると、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.3.1.8)$$

であるので、ロンドンの第2式は

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (2.3.1.9)$$

のように書け、ベクトル三重積の性質により、

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (2.3.1.10)$$

が得られる。したがって、マクスウェルの方程式(2.2.3)を用いて

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (2.3.1.11)$$

が得られる。

[2-7][2-8]

2.3.2 無限に厚い無限平面超伝導体^[2-9]

図 2.5 に示すような無限に厚い無限平面超伝導体を考え、ロンドンの方程式により内部の磁束密度を求める。具体的には次の範囲に超伝導体を定義して考える。

$$x = \pm\infty, y = \pm\infty, z \leq 0 \quad (2.3.2.1)$$

ここで超伝導体表面での磁束密度が $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, 0, 0)$ であるとき、超伝導体内部の磁束密度 $\mathbf{B}_{in} = (B_{inx}(z), 0, 0)$ をロンドン方程式により求める。

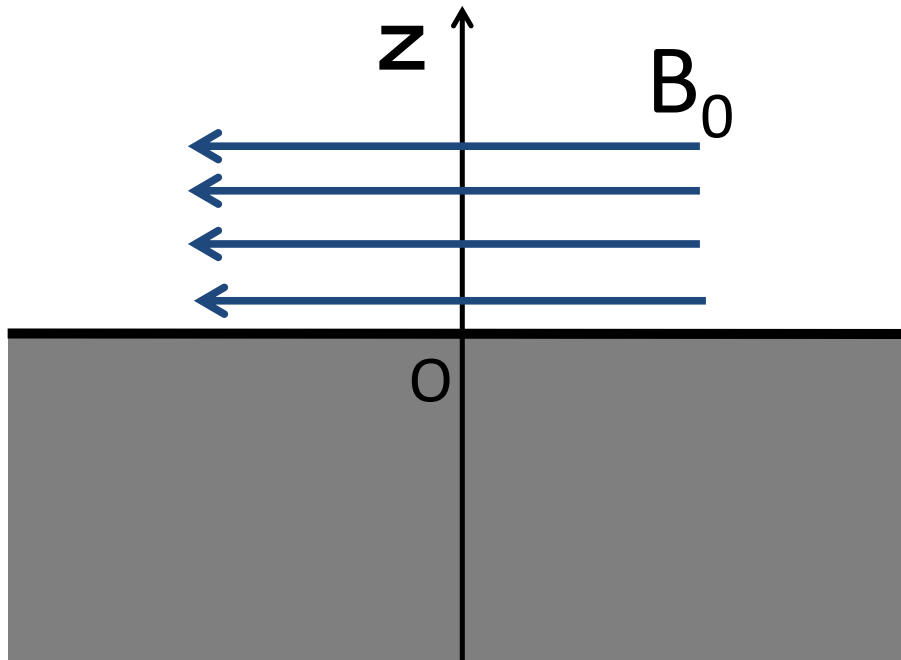


図 2.5 無限に厚い無限平面超伝導体

方程式は以下のようなになる。

$$\frac{d^2}{dz^2} B_{inx}(z) = \frac{1}{\lambda^2} B_{inx}(z) \quad (2.3.2.2)$$

この方程式の一般解は次のようになる。

$$B_{inx}(z) = C_1 e^{z/\lambda} + C_2 e^{-z/\lambda} \quad (2.3.2.3)$$

ここで解が発散しないために $C_2 = 0$ とし、境界条件 $z = 0 \Rightarrow B_x = B_{0x}$ を考慮すると以下のようなになる。

$$B_{inx}(z) = B_{0x} e^{z/\lambda} \quad (2.3.2.4)$$

この結果をグラフとして図 2.6 に示す。図 2.6 より超伝導体内では磁束密度は指数関数的に減衰し、 λ 程度侵入するとほぼ 0 になることがわかる。これにより超伝導体内部は表面を除いて磁束密度が 0 になり、マイスナー効果が説明される。

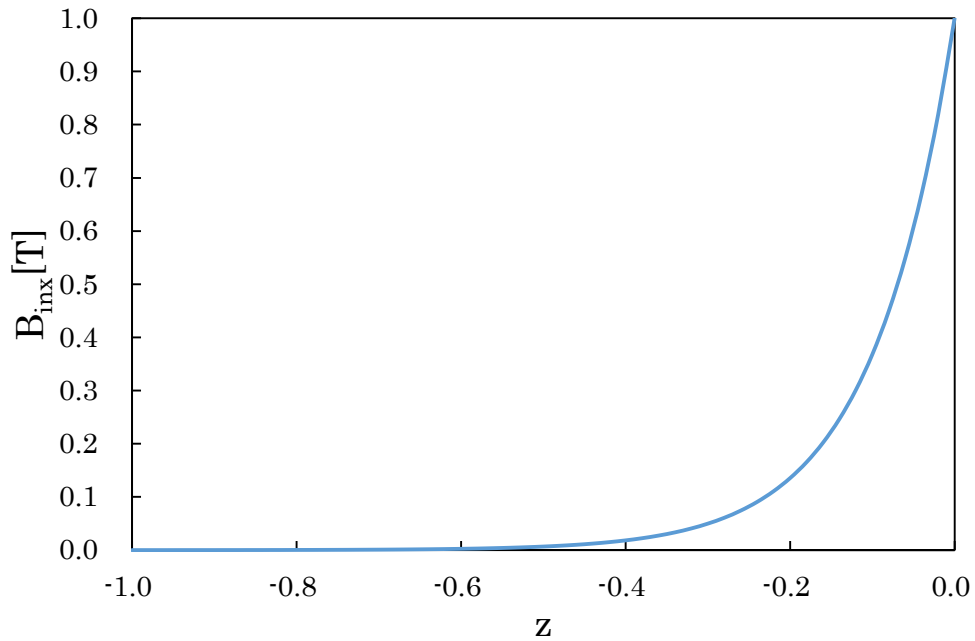


図 2.6 無限に厚い無限平面超伝導体におけるロンドン方程式の解

さらに、式(2.3.1.8) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ を用いると超伝導内部の電流密度 \mathbf{J}_{in} も求められる。

$$J_{iny}(z) = \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} B_{inx}(z) = \frac{B_{0x}}{\mu_0 \lambda} e^{z/\lambda} = J_{0y} e^{z/\lambda} \quad (2.3.2.5)$$

これにより電流もほぼ表面を流れていることがわかる。

2.3.3 無限平板超伝導体^[2-9]

図 2.7 のような厚さ $2d$ の無限平板超伝導体を考える。具体的には次の範囲に超伝導体を定義して考える。

$$x = \pm\infty, y = \pm\infty, -d \leq z \leq d \quad (2.3.3.1)$$

ここで超伝導体表面での磁束密度が $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, 0, 0)$ であるとする。このときの超伝導体内部の磁束密度を求める。

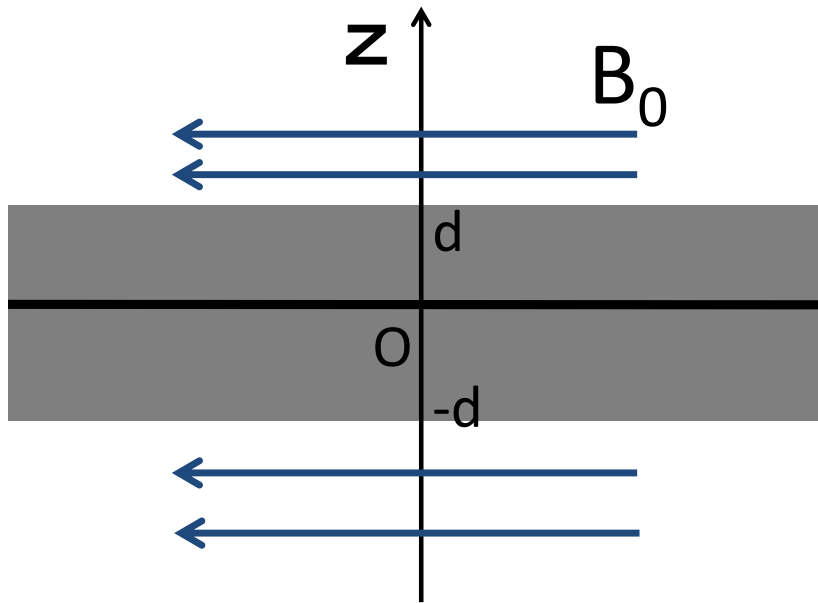


図 2.7 無限平板超伝導体

一次元ロンドン方程式は以下のようになる。

$$\frac{d^2}{dz^2} B_x = \frac{1}{\lambda^2} B_x \quad (2.3.3.2)$$

この方程式の一般解は次のように求まる。

$$B_x = C_1 e^{z/\lambda} + C_2 e^{-z/\lambda} \quad (2.3.3.3)$$

境界条件 $z = d, -d \Rightarrow B_x = B_{0x}$ を考慮すると以下のようになる。

$$\begin{cases} B_{0x} = C_1 e^{d/\lambda} + C_2 e^{-d/\lambda} \\ B_{0x} = C_1 e^{-d/\lambda} + C_2 e^{d/\lambda} \end{cases} \quad (2.3.3.4)$$

この 2 式から定数 C_1, C_2 が次のように定まる。

$$C_1 = \frac{B_{0x}}{e^{d/\lambda} + e^{-d/\lambda}} \quad (2.3.3.5)$$

$$C_2 = \frac{B_{0x}}{e^{d/\lambda} + e^{-d/\lambda}} \quad (2.3.3.6)$$

よって解は

$$B_x = \frac{e^{z/\lambda} + e^{-z/\lambda}}{e^{d/\lambda} + e^{-d/\lambda}} B_{0x} = \frac{\cosh(z/\lambda)}{\cosh(d/\lambda)} B_{0x} \quad (2.3.3.7)$$

となる。この結果をグラフとして図 2.8 に示す。

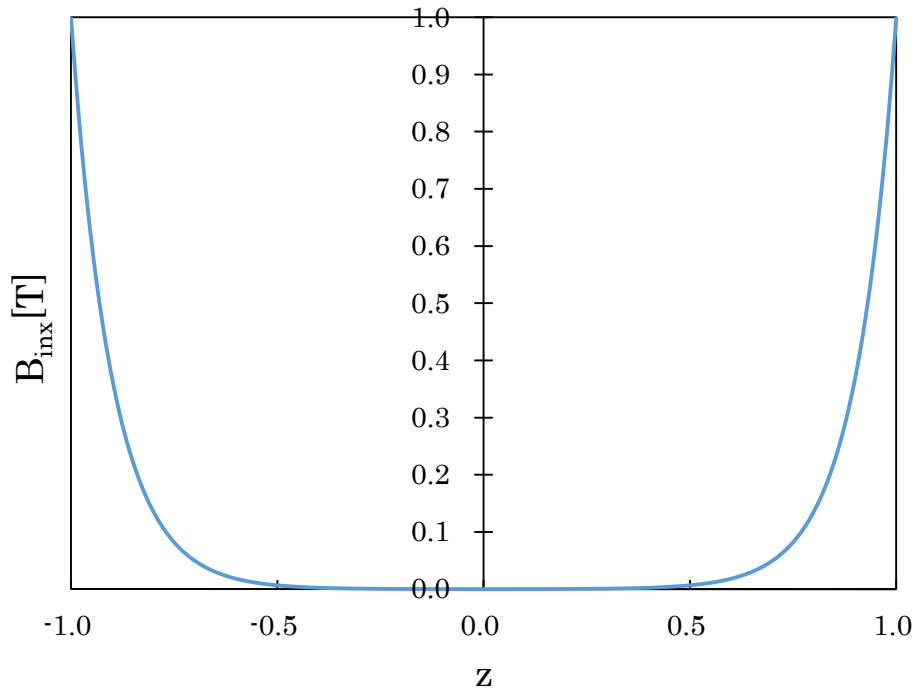


図 2.8 無限平板超伝導体におけるロンドン方程式の解

さらに、式(2.3.1.8) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ を用いると電流密度も求められる。

$$J_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} B_x = \frac{B_{0x}}{\mu_0 \lambda} \frac{\sinh(z/\lambda)}{\cosh(d/\lambda)} = J_{0y} \frac{\sinh(z/\lambda)}{\cosh(d/\lambda)} \quad (2.3.3.8)$$

2.3.4 無限円筒状超伝導体^[2-9]

図 2.9 のような無限円筒状超伝導体を考える。超伝導体は半径 a 高さ無限大の範囲にあるとする。ここで外部磁場 $\mathbf{B}_{ex} = B_{ex} \mathbf{e}_x$ を考える。円筒座標に直すと $\mathbf{B}_{ex} = B_{ex} \cos \varphi \mathbf{e}_\rho(\varphi) - B_{ex} \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ と書ける。

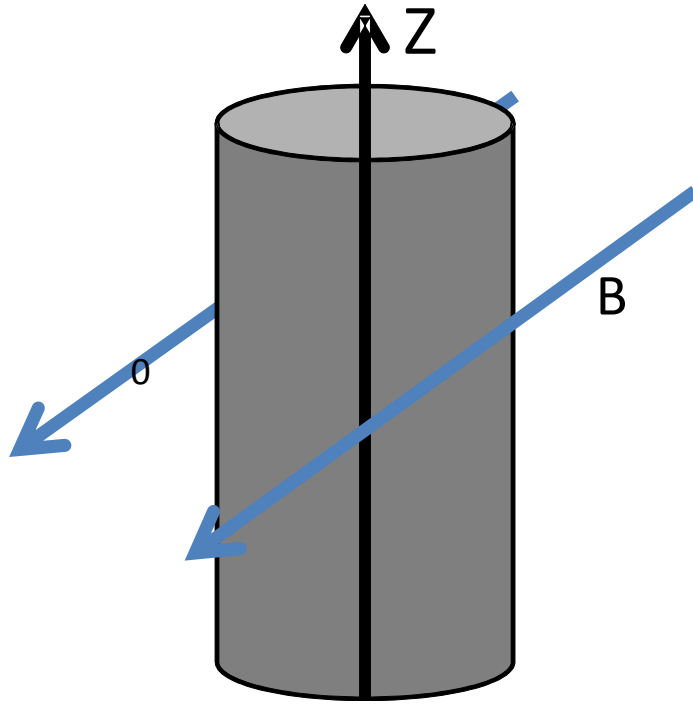


図 2.9 無限円筒状超伝導体

最初に超伝導電流に起因する磁束密度 \mathbf{B}_{sup} について考える。これは

$$\mathbf{B}_{sup} = -\frac{C}{\rho^2} B_{ex} \mathbf{e}_x + \frac{C}{\rho^2} B_{ex} \mathbf{e}_y = -\frac{C}{\rho^2} B_{ex} \cos\varphi \mathbf{e}_\rho(\varphi) - \frac{C}{\rho^2} B_{ex} \sin\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \quad (2.3.4.1)$$

と置くとつじつまがよい。ここで C は未定の定数である。

超伝導外の磁束密度 \mathbf{B}_{out} は \mathbf{B}_{ex} と \mathbf{B}_{sup} の和となるので、前述のことから次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{out} &= \left(B_{ex} - \frac{C}{\rho^2} B_{ex} \cos\varphi \right) \mathbf{e}_x - \frac{C}{\rho^2} B_{ex} \sin\varphi \mathbf{e}_y \\ &= \left(B_{ex} \cos\varphi - \frac{C}{\rho^2} B_{ex} \cos\varphi \right) \mathbf{e}_\rho(\varphi) + \left(-B_{ex} \sin\varphi - \frac{C}{\rho^2} B_{ex} \sin\varphi \right) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \end{aligned} \quad (2.3.4.2)$$

\mathbf{B}_{out} は ρ が大きくなると \mathbf{B}_{ex} に近づいていくためつじつまが合う。

これらのことから境界条件は

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_{out}]_{\rho=a} &= \left(B_{ex} - \frac{C}{a^2} B_{ex} \cos\varphi \right) \mathbf{e}_x - \frac{C}{a^2} B_{ex} \sin\varphi \mathbf{e}_y \\ &= \left(B_{ex} \cos\varphi - \frac{C}{a^2} B_{ex} \cos\varphi \right) \mathbf{e}_\rho(\varphi) + \left(-B_{ex} \sin\varphi - \frac{C}{a^2} B_{ex} \sin\varphi \right) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \\ &= [\mathbf{B}_{in}]_{\rho=a} \end{aligned} \quad (2.3.4.3)$$

となる。

超伝導体内電流密度 \mathbf{J}_{in} に対するロンドンの方程式は次のように書ける。

$$\nabla^2 \mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}) \quad (2.3.4.4)$$

円筒座標のラプラシアンから次のような方程式になる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} J_{\text{in}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} J_{\text{in}} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} J_{\text{in}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} J_{\text{in}} = \frac{1}{\lambda^2} J_{\text{in}} \quad (2.3.4.5)$$

今回の問題では $\frac{\partial^2}{\partial z^2} J_{\text{in}} = 0$ なので方程式は少し簡単になる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} J_{\text{in}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} J_{\text{in}} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} J_{\text{in}} = \frac{1}{\lambda^2} J_{\text{in}} \quad (2.3.4.6)$$

さらに J_{in} は z 方向についてしか成分を持たないと考えられるため $J_{\text{in}} = J_{\text{inz}} \mathbf{e}_z$ のように書け、方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} J_{\text{inz}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} J_{\text{inz}} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} J_{\text{inz}} = \frac{1}{\lambda^2} J_{\text{inz}} \quad (2.3.4.7)$$

これを変数分離 $J_{\text{inz}} = P(\rho)\theta(\varphi)$ を用いて変形すると以下の式になる。

$$\rho^2 \left\{ \frac{1}{P} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\lambda^2} \right\} = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \nu^2 \quad (2.3.4.8)$$

まず次式のような θ に関する方程式について考える。

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = -\nu^2 \theta \quad (2.3.4.9)$$

この方程式の一般解は次のようになる。

$$\theta = C_1 \cos(\nu\varphi) + C_2 \sin(\nu\varphi) \quad (2.3.4.10)$$

ここで接続条件 $\theta(0) = \theta(2\pi)$ を満たすためには $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ となる必要がある。また、 $\varphi = 0$ で $J_{\text{inz}} = 0$ と予想されることから $C_1 = 0$ となる。したがって解は次のようになる。

$$\theta = C_2 \sin(n\varphi) \quad (2.3.4.11)$$

次に P についての方程式について考える。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} - \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{n^2}{\rho^2} \right) P = 0 \quad (2.3.4.12)$$

これは変形ベッセル方程式と呼ばれ、この解は変形ベッセル関数で与えられ、一般解は第一種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ と第二種変形ベッセル関数 $K_n(x)$ の和で表される。ここで、第二種変形ベッセル関数は原点で発散してしまうためこの問題の解は

$$P = I_n \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) \quad (2.3.4.14)$$

とすべきである。なお、第一種変形ベッセル関数の一般的性質として、以下の漸化式を示しておく。

$$\frac{\partial}{\partial x} I_n(x) = \frac{1}{2} (I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) \quad (2.3.4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} I_n \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) = \frac{1}{2\lambda} \left(I_{n-1} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) + I_{n+1} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) \right) \quad (2.3.4.16)$$

$$I_n(x) = \frac{x}{2n} (I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)) \quad (2.3.4.17)$$

$$I_n\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) = \frac{\rho}{2\lambda n} \left(I_{n-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) - I_{n+1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right) \quad (2.3.4.18)$$

さて、 θ と P が求められたため、それらを掛け合わせたロンドン方程式の解は次のように書ける。

$$J_{inz} = C_2 I_n\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \sin(n\varphi) \quad (2.3.4.19)$$

$$\mathbf{J}_{in} = C_2 I_n\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \sin(n\varphi) \mathbf{e}_z \quad (2.3.4.20)$$

これを式(2.3.1.7) $\nabla \times \mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{B}$ によって磁束密度に直すと次のようになる。

$$\mathbf{B}_{in} = -\mu_0 \lambda^2 C_2 \frac{n}{\rho} I_n\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \cos(n\varphi) \mathbf{e}_\rho(\varphi) + \mu_0 \lambda C_2 \left(I_{n-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) - \lambda \frac{n}{\rho} I_n\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right) \sin(n\varphi) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \quad (2.3.4.21)$$

ここで式(2.3.4.3)に示した境界条件について成分ごとに分けて考えると次の2式が成り立つ。

$$B_{ex} \cos\varphi - \frac{C}{a^2} B_{ex} \cos\varphi = -\mu_0 \lambda^2 C_2 \frac{n}{a} I_n\left(\frac{a}{\lambda}\right) \cos(n\varphi) \quad (2.3.4.22)$$

$$-B_{ex} \sin\varphi - \frac{C}{a^2} B_{ex} \sin\varphi = \mu_0 \lambda C_2 \left(I_{n-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right) - \lambda \frac{n}{a} I_n\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right) \sin(n\varphi) \quad (2.3.4.23)$$

これらの式の両辺は φ によらず等しくなければならない。したがって $n=1$ とする必要がある。すると式(2.3.4.22)、式(2.3.4.23)は

$$B_{ex} - \frac{C}{a^2} B_{ex} = -\mu_0 \lambda^2 C_2 \frac{1}{a} I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) \quad (2.3.4.24)$$

$$-B_{ex} - \frac{C}{a^2} B_{ex} = \mu_0 \lambda C_2 \left(I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right) - \lambda \frac{1}{a} I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right) \quad (2.3.4.25)$$

のようになる。ここから C_2 と C を求めると次のようになる。

$$C_2 = -\frac{2B_{ex}}{\mu_0 \lambda I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \quad (2.3.4.26)$$

$$C = a^2 - 2a\lambda \frac{I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \quad (2.3.4.27)$$

したがって最終的な解は次のようになる。

$$\mathbf{B}_{in} = \frac{2B_{ex}\lambda}{I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{1}{\rho} I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \cos(\varphi) \mathbf{e}_\rho(\varphi) - \frac{2B_{ex}}{I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \left(I_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) - \lambda \frac{1}{\rho} I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \right) \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \quad (2.3.4.28)$$

$$\mathbf{J}_{in} = -\frac{2B_{ex}}{\mu_0 \lambda I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} I_1\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \sin(\varphi) \mathbf{e}_z \quad (2.3.4.29)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{out} = & \left(B_{ex} \cos\varphi - \frac{a^2}{\rho^2} B_{ex} \cos\varphi + \frac{2a\lambda I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{\rho^2 I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} B_{ex} \cos\varphi \right) \mathbf{e}_\rho(\varphi) \\
& + \left(-B_{ex} \sin\varphi - \frac{a^2}{\rho^2} B_{ex} \sin\varphi + \frac{2a\lambda I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right)}{\rho^2 I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} B_{ex} \sin\varphi \right) \mathbf{e}_\varphi(\varphi)
\end{aligned}
\tag{2.3.4.30}$$

これをグラフとして図 2.10 と図 2.11 に示す。

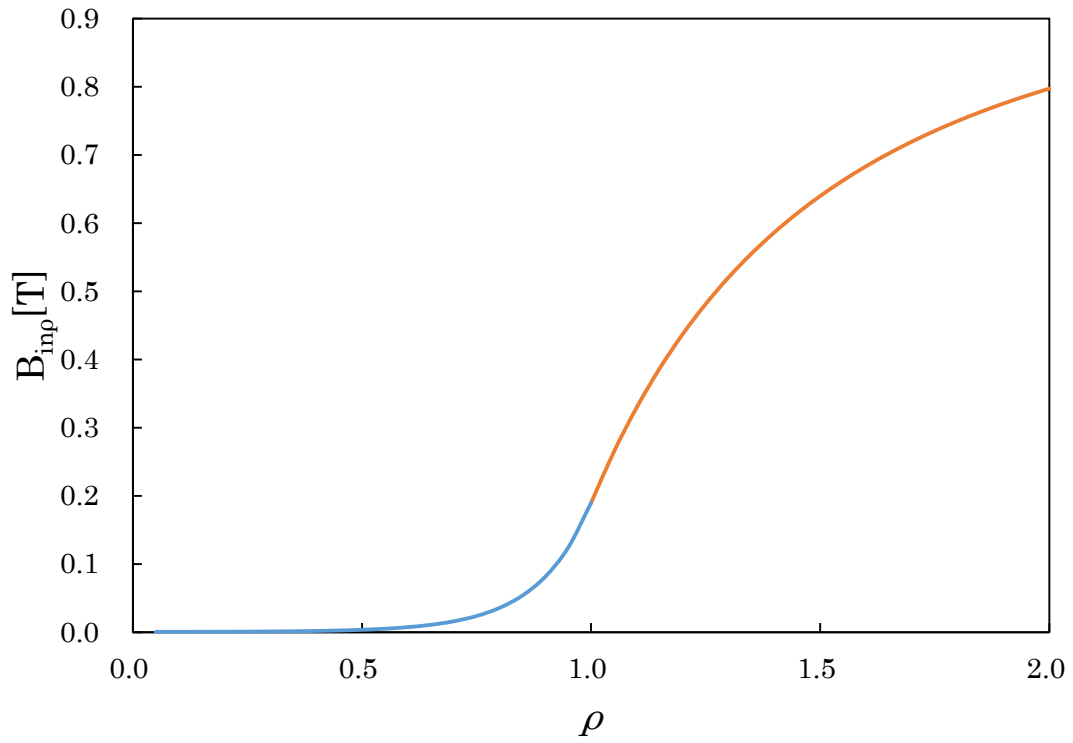


図 2.10 無限円柱状超伝導体を含む場の ρ 方向の磁束密度

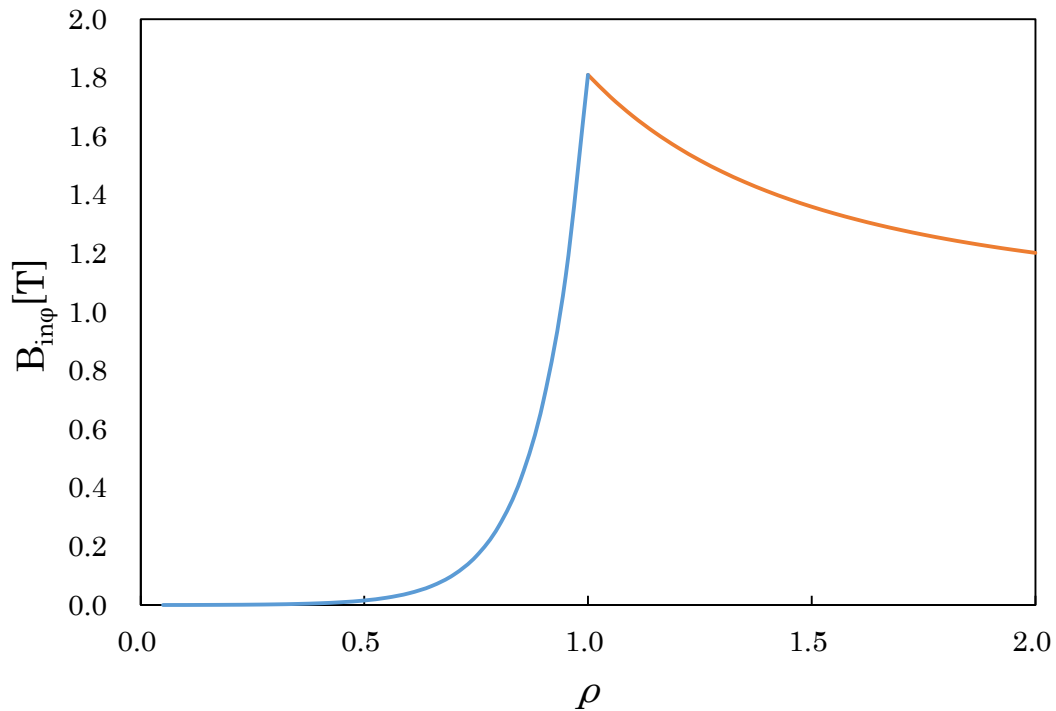


図 2.11 無限円柱状超伝導体を含む場の φ 方向の磁束密度

参考文献

- [2-6] 渋谷寿 超電導はおもしろい！ オーム社(1998) p.29
- [2-7] 大沼俊朗 超伝導電磁気学 コロナ社(1995) p.13~16
- [2-8] 御子柴宣夫、鈴木克生 超伝導物理入門 培風館(1995) p8~10
- [2-9] 丹羽雅昭 超伝導の基礎 東京電機大学出版(2002) p21~33

2.4 逐次代入法^[2-10]

コンピュータを用いた代数方程式の解法に逐次代入法がある。つぎのような方程式

$$F(x) = 0 \tag{2.4.1}$$

があるとき、これを次のように変形する。

$$x = f(x) \tag{2.4.2}$$

この式の右辺に x_0 を代入し、 x_1 を求める。この操作を繰り返す。

$$x_{i+1} = f(x_i) \tag{2.4.3}$$

すると x の値は方程式の解に近づいていく。収束判定は次のように考えればよい。

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < e \tag{2.4.4}$$

例として、次のような方程式を考える。

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (2.4.5)$$

この方程式の解は $x = 1$ である。これを逐次代入法で解く。まず式を変形し、

$$x = \sqrt{2x - 1} \quad (2.4.6)$$

とする。これに逐次代入法を適用すると

$$x_{i+1} = \sqrt{2x_i - 1} \quad (2.4.7)$$

となる。解の収束の様子を図 2.12 に示す。

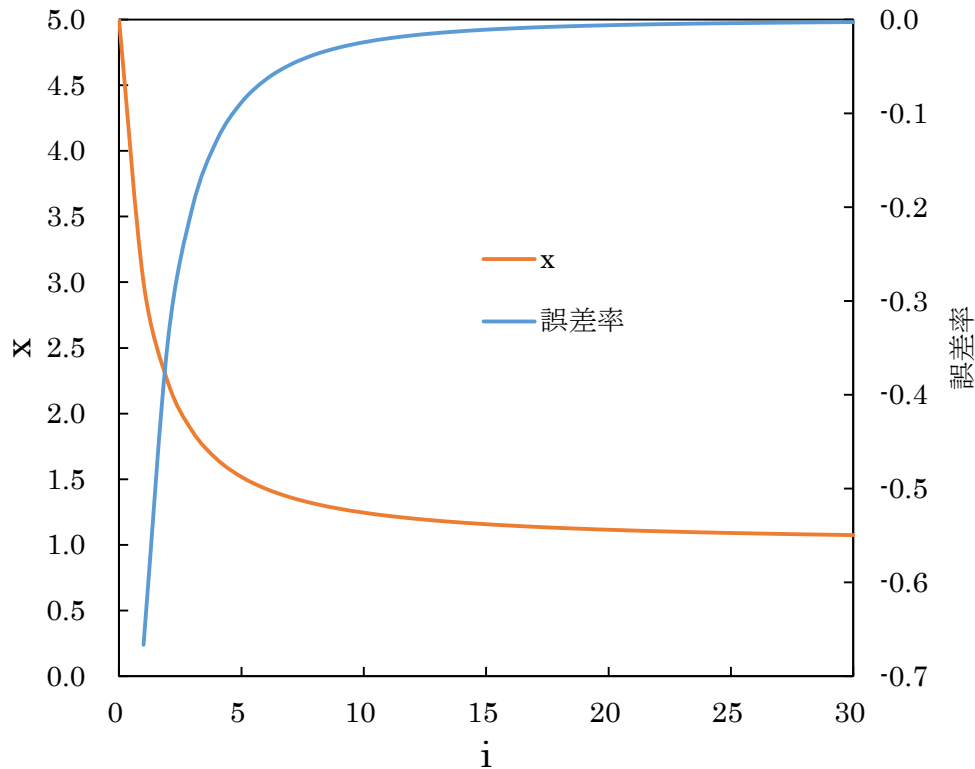


図 2.12 逐次代入法による解の収束

図 2.12 より x の値が i が増えるにつれて1に近づき、収束することがわかる。

参考文献

[2-10] 平田光穂、須田精二郎、竹本宜弘 パソコンによる数値計算 朝倉書店(1982) p.62~69

2.5 ニュートン法^[2-11]

ニュートン法もまた方程式を数値的に解く方法である。ここで既知の関数 $F(x)$ に関し、

$$F(x) = 0 \quad (2.5.1)$$

のような方程式の解を求めることを考える。まず関数 $F(x)$ の x_0 における接線を考え、接線と x 軸との交点を x_1 とすると

$$F(x_0) = F'(x_0)x_0 + b \quad (2.5.2)$$

$$b = F(x_0) - F'(x_0)x_0 \quad (2.5.3)$$

$$0 = F'(x_0)x_1 + F(x_0) - F'(x_0)x_0 \quad (2.5.4)$$

$$x_1 = -\frac{F(x_0)}{F'(x_0)} + x_0 \quad (2.5.5)$$

が得られる。これを次式のように繰り返すと接線と x 軸の交点は(2.5.1)式の解に近づいてゆく。

$$x_{i+1} = -\frac{F(x_i)}{F'(x_i)} + x_i \quad (2.5.6)$$

図 2.13 にニュートン法の模式図を示す。

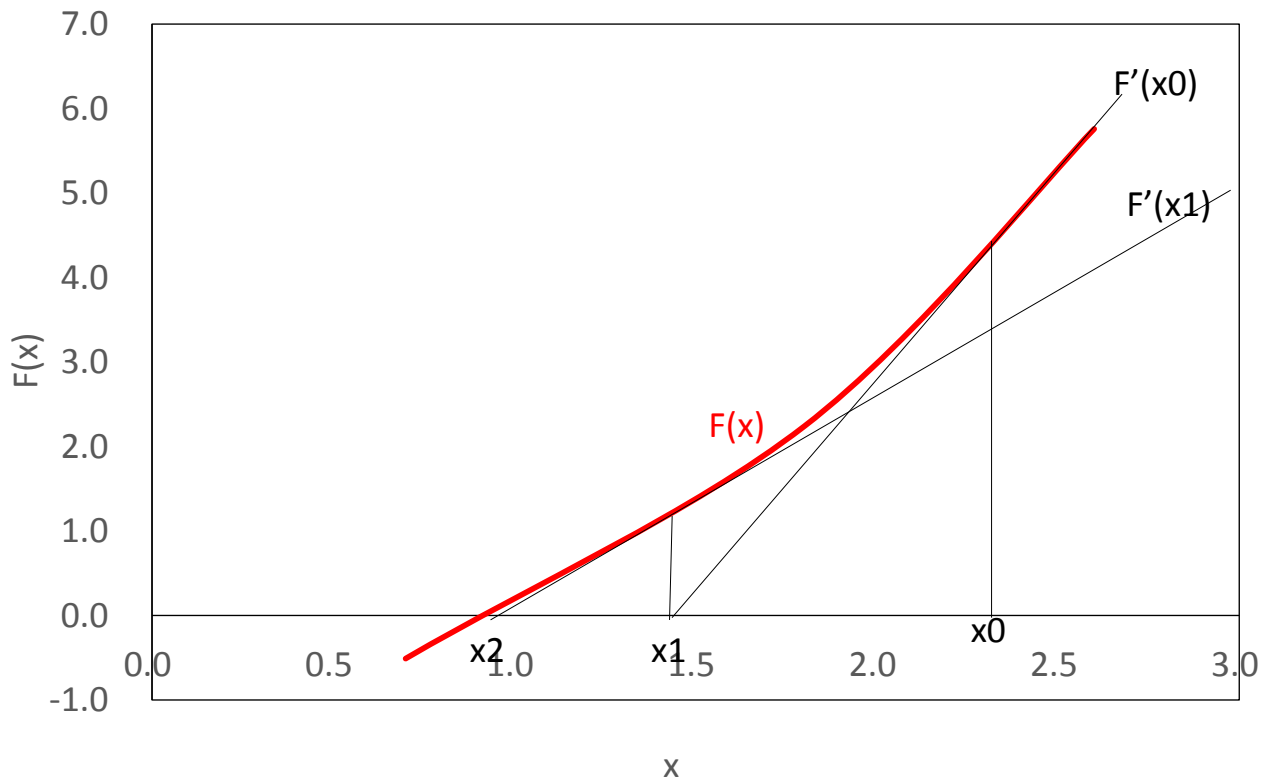


図 2.13 ニュートン法

収束判定には

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < e \quad (2.5.7)$$

か、あるいは

$$|F(x_i)| < e \quad (2.5.8)$$

を用いることができる。

例えば次のような方程式を考える。

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (2.5.9)$$

解の収束の様子を図 2.14 に示す。

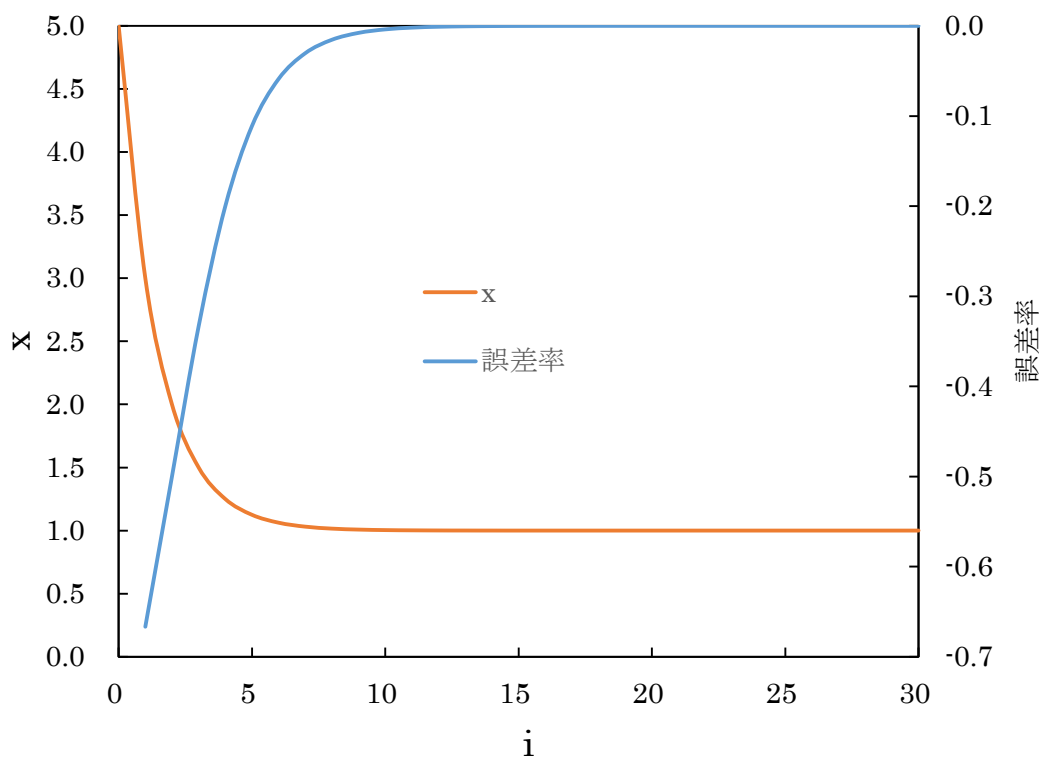


図 2.14 ニュートン法による解の収束

図 2.14 より i が大きくなるにつれて x の値が 1 に近づき、収束することがわかる。

参考文献

[2-11] 平田光穂、須田精二郎、竹本宜弘 パソコンによる数値計算 朝倉書店(1982) p.62~69

2.6 差分法

差分法は接線の勾配を近接 2 点間の勾配で近似する方法で、常微分方程式や偏微分方程式に用いることでこれらの解を数値的に求めることができる。

近接 2 点の取り方によって前進差分、後退差分、中心差分がある。一階の偏微分を前進差分により近似すると次のようになる^[2-12]。

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.6.1)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial y} \approx \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j} \quad (2.6.2)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial z} \approx \frac{F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k}}{z_{k+1} - z_k} \quad (2.6.3)$$

つづいて後退差分による近似は

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial x} \approx \frac{F_{i,j,k} - F_{i-1,j,k}}{x_i - x_{i-1}} \quad (2.6.4)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial y} \approx \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j-1,k}}{y_j - y_{j-1}} \quad (2.6.5)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial z} \approx \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j,k-1}}{z_k - z_{k-1}} \quad (2.6.6)$$

のようになる。最後に中心差分による近似は

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial x} \approx \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i-1,j,k}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (2.6.7)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial y} \approx \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j-1,k}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \quad (2.6.8)$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial z} \approx \frac{F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} \quad (2.6.9)$$

のようになる。また二階微分は前進差分と後退差分を組み合わせて次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 F(\mathbf{r})}{\partial x^2} \approx \frac{\left(\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial x}\right)_{i+1,j,k} - \left(\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial x}\right)_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_i} \approx \frac{F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{F_{i,j,k} - F_{i-1,j,k}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.6.10)$$

$$\frac{\partial^2 F(\mathbf{r})}{\partial y^2} \approx \frac{\left(\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial y}\right)_{i,j+1,k} - \left(\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial y}\right)_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j} \approx \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j-1,k}}{y_j - y_{j-1}}}{y_{j+1} - y_j} \quad (2.6.11)$$

$$\frac{\partial^2 F(\mathbf{r})}{\partial z^2} \approx \frac{\left(\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial z}\right)_{i,j,k+1} - \left(\frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial z}\right)_{i,j,k}}{z_{k+1} - z_k} \approx \frac{F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{F_{i,j,k} - F_{i,j,k-1}}{z_k - z_{k-1}}}{z_{k+1} - z_k} \quad (2.6.12)$$

また、差分法を使うときには空間を格子で分ける必要がある。格子の幅は一定である必要はなく、境界付近の格子を細かくすることで計算精度を上げることができる場合がある。図 2.15 に二次元等間隔格子の模式図を示す。

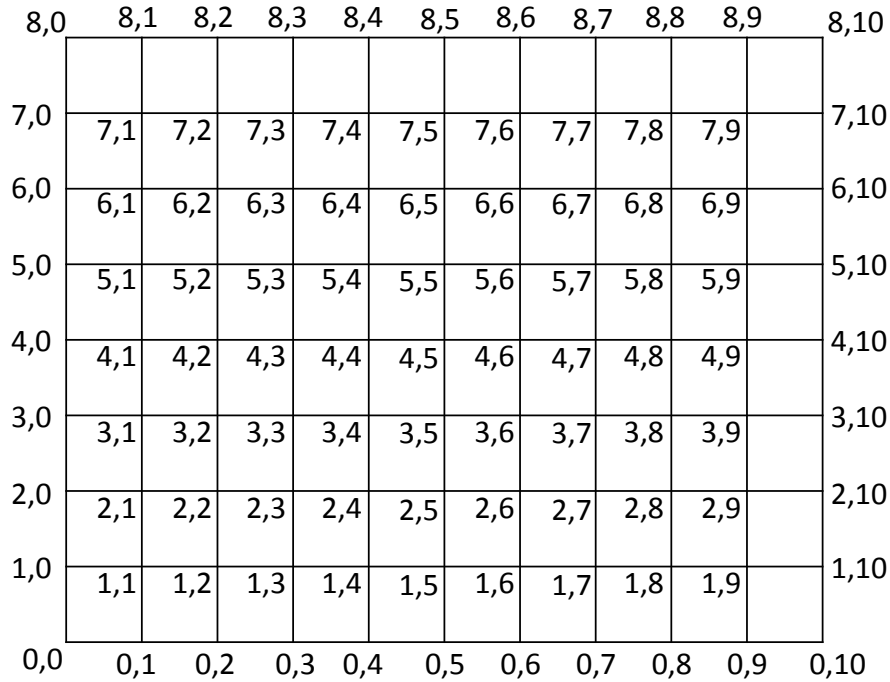


図 2.15 等間隔格子

微分方程式に差分法を適用することで微分方程式は差分方程式となる。差分方程式はすべての格子点で立てることができる。そのため差分方程式は格子点の数だけの連立方程式になる。たとえば格子が 1~n までであると n 元の連立方程式となる。この連立方程式を解くことでそれぞれの格子点における値がわかり数値的に方程式が解けたことになる。

微分方程式は境界条件が定められていないと解が得られないのと同じように差分方程式でも境界条件が必要である。したがって末端の点において条件がないと解けない。たとえばディリクレの境界条件は以下のように表現できる。

$$\begin{cases} B_{x_0} = a \\ B_{x_{n+1}} = b \end{cases} \quad (2.6.13)$$

またノイマンの境界条件は

$$\begin{cases} \frac{dB_{x_0}}{dz} = c \\ \frac{dB_{x_{n+1}}}{dz} = d \end{cases} \quad (2.6.14)$$

のように表される。これを差分法で書くと次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{B_{x_1} - B_{x_0}}{z_1 - z_0} = c \\ \frac{B_{x_{n+1}} - B_{x_n}}{z_{n+1} - z_n} = d \end{cases} \quad (2.6.15)$$

参考文献

[2-12] 山崎郭滋 偏微分方程式の数値解法入門 森北出版(1999) p.18~30

2.7 ガウスザイデルの反復法

連立方程式の解法としてガウスの反復法がある。まず、次のような n 元連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.7.1)$$

この式を次のように変形する。

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases} \quad (2.7.2)$$

最初に右辺の x_1, x_2, \dots, x_n に適当な初期値 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ を与え、左辺の値を $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ とする。次に $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ を右辺に代入して $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$ を求める。この操作を収束するまで繰り返す。収束判定は相対誤差を用いて次の式を満たしたときとする^[2-13]。

$$\frac{\sum_{k=1}^n |x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)}|}{\sum_{k=1}^n |x_k^{(m+1)}|} \leq \varepsilon \quad (2.7.3)$$

参考文献

[2-13] 山崎郭滋 偏微分方程式の数値解法入門 森北出版(1999) p.6,7

2.8 数値積分法

数値積分法で最も一般的なものとして台形積分がある。台形公式は区分された面積を台形で近似して積分値を求める方法である^[2-14]。図 2.16 に台形公式の模式図を示す。

$$\frac{1}{2} \sum_i (f(x_i) + f(x_{i+1})) \Delta x_{i,i+1} \quad (2.8.1)$$

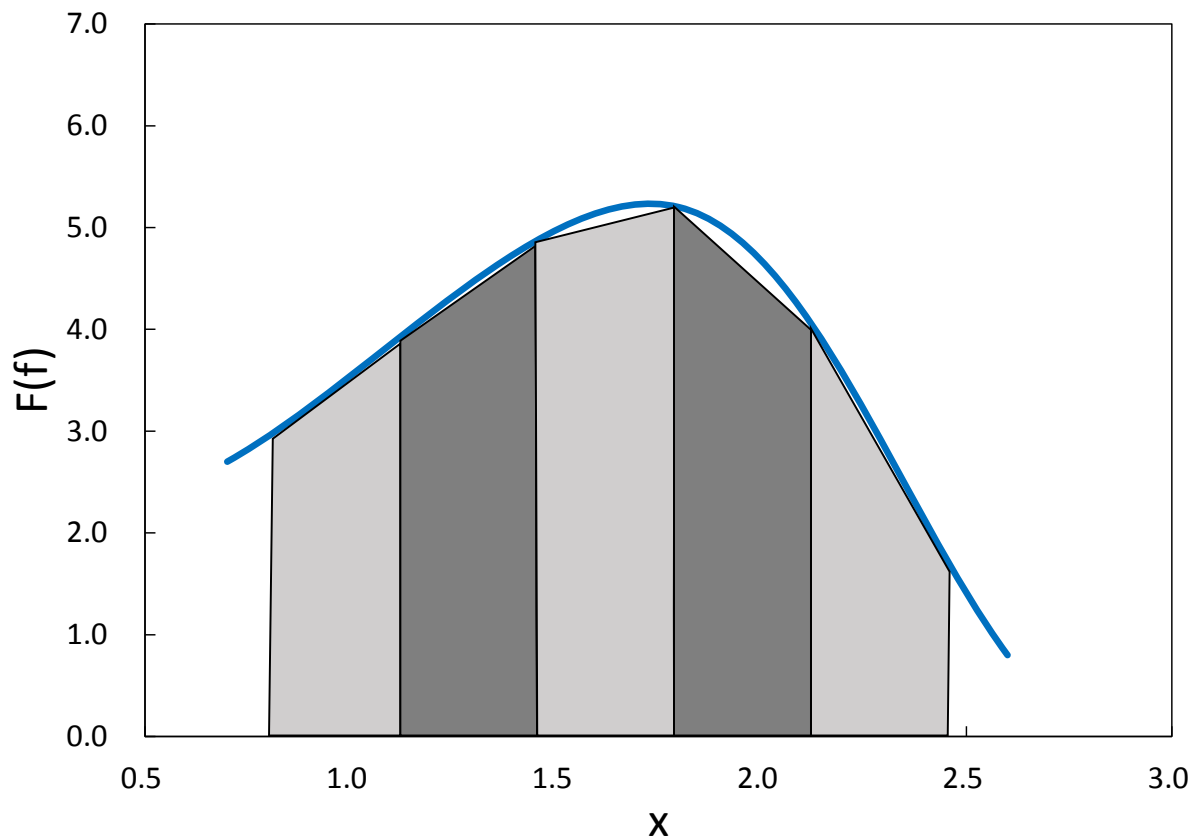


図 2.16 台形積分

二重指数型数値積分法は双曲線関数を用いた変数変換を行い、変換された関数を台形公式で数値積分する方法である^[2-15]。端点に特異点を持つ被積分関数に対しても精度の高い結果を得ることができる。双曲線関数を用いた変数変換によって積分範囲の端点を無限遠に押しやることで特異点の積分を可能にしている。具体的な変数変換は

$$x = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinht}\right) + \frac{b+a}{2} \quad (2.8.2)$$

$$dx = \frac{b-a}{2} \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{cosht}}{\operatorname{cosh}^2\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinht}\right)} dt \quad (2.8.3)$$

と表され、この時の積分範囲は $[-\infty, \infty]$ に変換される。^[2-15]

例として次のような被積分関数を考える。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.8.4)$$

この関数の概形を図 2.17 に示す。

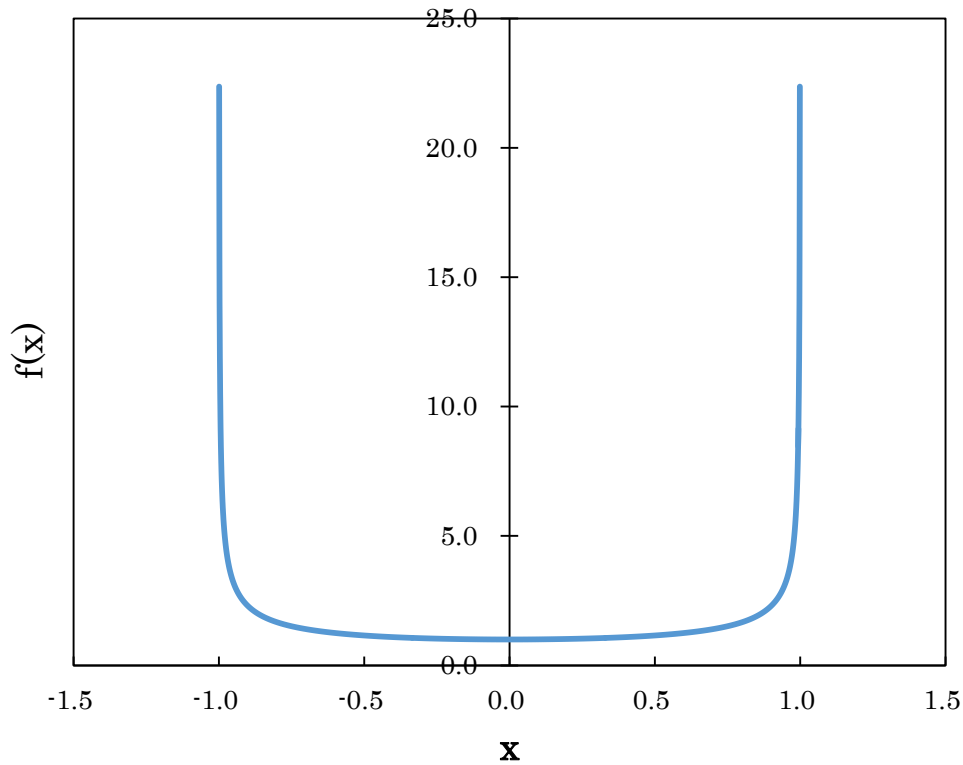


図 2.17 関数 $(1-x)^{-1/2}$

この関数の範囲 $[-1,1]$ における定積分は次のように簡単に求められる。

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}x]_{-1}^1 = \pi \quad (2.8.5)$$

しかし、 $x = -1,1$ のときに特異点を持つため、この積分を一般的な数値積分によって求めた場合、非常に精度が悪くなる。そこで式(2.8.2)の変数変換を施してみる。すると次のような積分になる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinht}\right)}} \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{cosht}}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinht}\right)} dt \quad (2.8.6)$$

この積分の被積分関数

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinht}\right)}} \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{cosht}}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinht}\right)} \quad (2.8.7)$$

について概形を図 2.18 に示す。

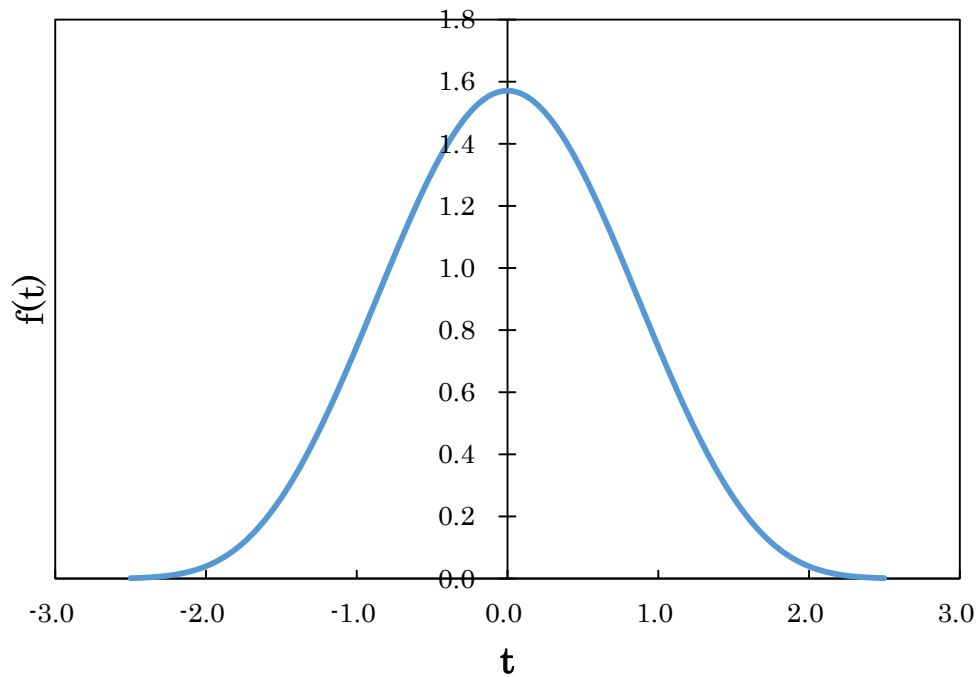


図 2.18 関数 $\frac{\pi}{2} \operatorname{cosh} t / \left(\operatorname{cosh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinh} t \right) \sqrt{1 - \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinh} t \right)} \right)$

この関数は特異点を持たないことがわかる。積分範囲は $[-\infty, \infty]$ だが、関数の形から考えて適当な値で区切っても精度よく計算できることがわかる。

参考文献

[2-14] 竹之内脩 パソコン微分積分入門 現代数学社(1985) p83

[2-15] 長田直樹 数値微分積分法 現代数学社(1987) p211~216

第三章 計算手法

この章ではまず、本研究の目的の一つである磁気浮上の理論の構築について述べる。

本研究では磁気浮上の理論としてロンドン方程式、境界条件、つり合いの式の 3 式を考えた。第一に磁石と超伝導電流の間に働くローレンツ力と磁石にかかる重力のつり合いを考えたりつり合いの式について述べる。続いて差分法によりロンドン方程式を差分方程式に直す。ロンドン方程式の境界条件について考察し、式を導出する。

また磁石の浮上位置を求めるための計算手法についても述べる。

まず、ビオ・サバルの法則を数値計算に使えるよう式を変形し、二重指数型数値積分法を適用する。さらに浮上位置計算のアルゴリズムについても説明する。

3.1 重力とローレンツ力の釣り合い

磁石を超伝導体の上に乗せると磁石は超伝導体の上に浮上する。この時磁石には重力とそれに釣り合う浮上力が働いている。この浮上力は磁石と超伝導体の間に働く磁気圧力と考えられる。磁気圧力は磁束線の密度が高いとき大きくなる。磁石を超伝導体の上に乗せると磁石の磁束線はマイスナー効果によって超伝導体から排除される。すると磁石と超伝導体の間の磁束線の密度が高くなる。したがって磁石と超伝導体の間の磁気圧力は大きくなり、磁石が超伝導体の上に浮上する。

本研究ではこの磁気圧力による力をローレンツ力と考える。磁気圧力は電磁気学の近接作用論の考え方であり、電磁気力は電場や磁場などを介して力が伝わるとみなしている。一方ローレンツ力やクーロン力などは遠隔作用論の考え方であり、電荷や電流などが離れた物体間で直接働くとみなしている。現在の物理学では近接作用論が正しいと結論付けられているが、あくまで考え方の違いであるため遠隔作用論の計算を行っても正しい結果となる。したがって、磁気圧力をローレンツ力とみなして計算を行っても正しい結果が得られる。

図 3.1 のように磁石を超伝導体の上に浮かべたとき、超伝導電流 J_{in} は磁石からローレンツ力 F_{Jm} を受けていると考えられる。すると磁石はローレンツ力の反作用 F_{mJ} を受けている。この反作用が磁石にかかる浮上力になる。そのため磁石は重力とローレンツ力の反作用が釣り合う位置に浮くと考えられる。このことから磁石の浮上位置を求めることができる。

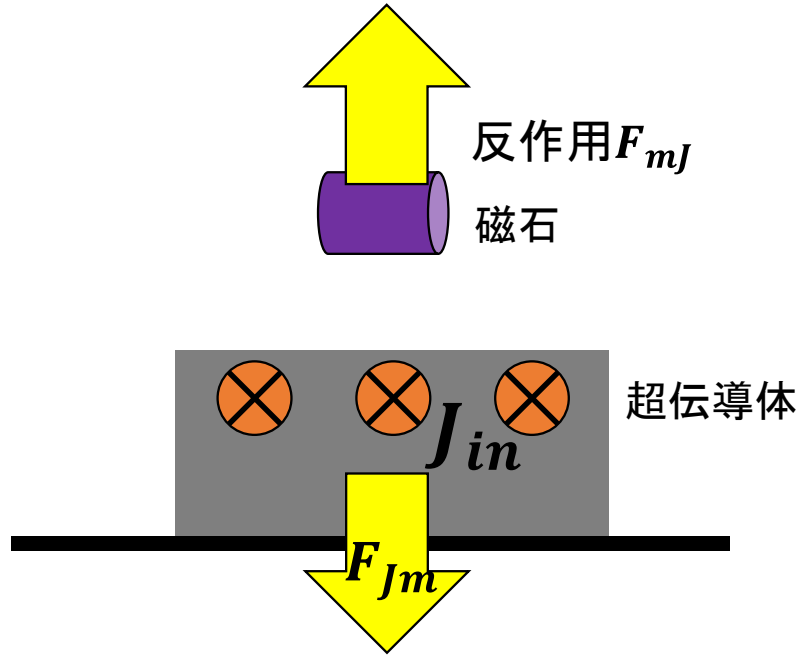


図 3.1 超伝導体の上に浮上する磁石

電流密度が受けるローレンツ力が式(2.2.24)で表現されることから超伝導電流 J_{in} が磁石から受けるローレンツ力 F_{Jm} は磁石の位置を \mathbf{r}_m で表すと、次のようになる。

$$\mathbf{F}_{Jm} = \int_V \mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \times \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}^3 \quad (3.1.1)$$

また、磁石が受けるローレンツ力の反作用 \mathbf{F}_{mJ} は次のようになる。

$$\mathbf{F}_{mJ} = -\mathbf{F}_{Jm} = - \int_V \mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \times \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}^3 \quad (3.1.2)$$

ここで重力 $M\mathbf{g}$ とのつり合いを考えると次の式が成り立つ。

$$\mathbf{F}_{mJ} - M\mathbf{g} = - \int_V \mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \times \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}^3 - M\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (3.1.3)$$

この式が成り立つような位置に磁石は浮くと考えられる。

ここで式(2.3.1.8) $\mathbf{J}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_{in}$ を用いると次のようにも表現できる。

$$- \frac{1}{\mu_0} \int_V (\nabla \times \mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)) \times \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}^3 - M\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (3.1.4)$$

つり合いの式はニュートン法による数値計算によって解き、磁石の浮上位置を求めた。

3.2 差分法によるロンドン方程式の解法

ローレンツ力を求めるには超伝導内部の磁束密度 \mathbf{B}_{in} を求めなければならない。超伝導体内部の電磁場はロンドン方程式を解くことで得られる。しかしロンドン方程式は特別な条件の下でしか解析的に解く

ことができない。たとえば無限平板超伝導体や無限円柱状超伝導体などは2.3で示したように解析的に解ける。そのため一般的な条件の下でロンドン方程式を解くためには数値計算を用いる。そこで本研究ではロンドン方程式を差分方程式に直すことで、連立方程式の問題とする。この連立方程式をガウス・ザイデルの反復法によって解くことにした。

一次元のロンドン方程式(2.3.2.2)を差分方程式にすると次のようになる。

$$\frac{\frac{B_{inx_{k+1}} - B_{inx_k}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{B_{inx_k} - B_{inx_{k-1}}}{z_k - z_{k-1}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{1}{\lambda^2} B_{inx_k} = 0 \quad (3.2.1)$$

ここで二次元、三次元のロンドンの差分方程式も示しておく。

二次元ロンドン差分方程式

$$\frac{\frac{B_{inx_{i+1,k}} - B_{inx_{i,k}}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{B_{inx_{i,k}} - B_{inx_{i-1,k}}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\frac{B_{inx_{i,k+1}} - B_{inx_{i,k}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{B_{inx_{i,k}} - B_{inx_{i,k-1}}}{z_k - z_{k-1}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{B_{inx_{i,k}}}{\lambda^2} = 0 \quad (3.2.2)$$

三次元ロンドン差分方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{B_{inx_{i+1,j,k}} - B_{inx_{i,j,k}}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{B_{inx_{i,j,k}} - B_{inx_{i-1,j,k}}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\frac{B_{inx_{i,j+1,k}} - B_{inx_{i,j,k}}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{B_{inx_{i,j,k}} - B_{inx_{i,j-1,k}}}{y_j - y_{j-1}}}{y_{j+1} - y_j} \\ & + \frac{\frac{B_{inx_{i,j,k+1}} - B_{inx_{i,j,k}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{B_{inx_{i,j,k}} - B_{inx_{i,j,k-1}}}{z_k - z_{k-1}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{B_{inx_{i,j,k}}}{\lambda^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

さらに、円筒座標のロンドン差分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{B_{in\rho_{i+1,j,k}} - B_{in\rho_{i,j,k}}}{\rho_{i+1} - \rho_i} - \frac{B_{in\rho_{i,j,k}} - B_{in\rho_{i-1,j,k}}}{\rho_i - \rho_{i-1}}}{\rho_{i+1} - \rho_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{B_{in\rho_{i+1,j,k}} - B_{in\rho_{i-1,j,k}}}{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}} \\ & + \frac{1}{\rho_i^2} \frac{\frac{B_{in\rho_{i,j+1,k}} - B_{in\rho_{i,j,k}}}{\varphi_{j+1} - \varphi_j} - \frac{B_{in\rho_{i,j,k}} - B_{in\rho_{i,j-1,k}}}{\varphi_j - \varphi_{j-1}}}{\varphi_{j+1} - \varphi_j} \\ & + \frac{\frac{B_{in\rho_{i,j,k+1}} - B_{in\rho_{i,j,k}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{B_{in\rho_{i,j,k}} - B_{in\rho_{i,j,k-1}}}{z_k - z_{k-1}}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{1}{\lambda^2} B_{in\rho} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

3.3 境界条件

微分方程式や偏微分方程式の解を得るためには境界条件が必要である。たとえば次のような微分方程式を考える。

$$\frac{d^2}{dx^2} y = 0$$

この微分方程式の一般解は次のようになる。

$$y = Ax + B$$

この解には任意定数 A,B が含まれている。A,B を決めるためには境界条件が必要となる。例として次のような境界条件を考えてみる。

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

すると次のような連立方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

これより任意定数 A,B が次のように求まる。

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

したがって、微分方程式の解は次のように求められた。

$$y = -x + 1$$

ロンドン方程式も偏微分方程式なので境界条件がなければ解くことができない。そこでロンドン方程式の境界条件について以下に述べる。

超伝導体内部の磁束密度と超伝導体外部の磁束密度は超伝導体表面で等しくなければならない。そこで、ロンドン方程式の境界条件として超伝導体表面上で超伝導体内部の磁束密度 B_{in} と超伝導体外部の磁束密度 B_{out} が等しいことを考える(ディリクレの境界条件)。

$$B_{out}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) = B_{in}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) \quad (3.3.1)$$

ここで、 \mathbf{r}_s は境界上の位置ベクトルをとする。

ここで、ロンドン方程式は超伝導体がマイスナー効果を示しているとき成り立つ方程式である。そのため、その境界条件には図 3.2 のような外部磁束密度 B_{ex} がかかっているだけの状態での $B_{out}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m)$ ではなく、図 3.3 のようなマイスナー効果を示している状態での $B_{out}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m)$ を用いる必要がある。

外部磁束密度 B_{ex}

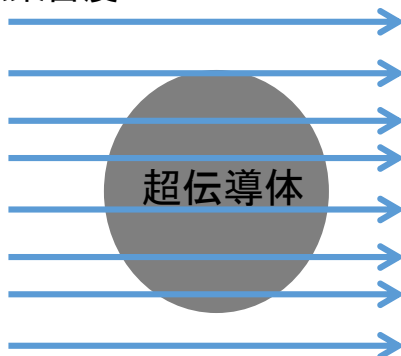


図 3.2 外部磁束密度のかかる超伝導体

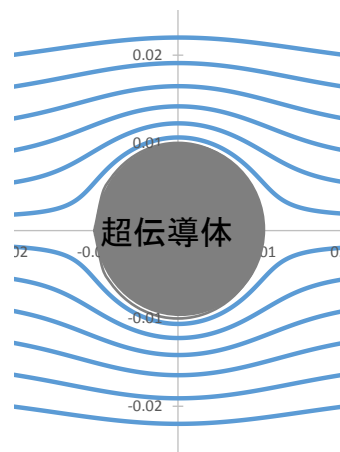


図 3.3 マイスナー効果を示す超伝導体

しかし超伝導体の問題において一般的に与えられる条件は外部磁束密度 B_{ex} であり、図 3.3 のようなマイ

スナー効果が示されている状態での $\mathbf{B}_{out}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m)$ は条件として与えられることはない。

そこで、 \mathbf{B}_{out} がどのように表現できるか考える。マイスナー効果を示している状態を考えているため \mathbf{B}_{out} は外部磁束密度 \mathbf{B}_{ex} だけではなく、超伝導電流 \mathbf{J}_{in} がつくる磁束密度 \mathbf{B}_{sup} も関係があると考えられる。そこで \mathbf{B}_{out} は次のように表現できる。

$$\mathbf{B}_{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) = \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) + \mathbf{B}_{sup}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) \quad (3.3.2)$$

ここで \mathbf{B}_{sup} は \mathbf{J}_{in} が作る磁束密度なので電流のつくる磁束密度を計算できるビオ・サバルの法則を用いて書き直すと次のようになる。

$$\mathbf{B}_{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) = \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) + \mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'^3 \quad (3.3.3)$$

ここに式(3.3.1)を代入すると

$$\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) = \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) + \mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'^3 \quad (3.3.4)$$

ここで超伝導電流 \mathbf{J}_{in} は式(2.3.1.8) $\mathbf{J}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_{in}$ に基づいて計算されるため、

$$\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) = \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) + \int_V \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m)) \times (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'^3 \quad (3.3.5)$$

となる。この式をロンドン方程式の境界条件として用いることができる。

しかし、この式を解析的に解くことは難しい。なぜなら、左辺と右辺の積分中に \mathbf{B}_{in} が含まれている積分方程式の形になってしまっているからである。さらに、右辺の積分中に含まれる $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m)$ はロンドン方程式を解かなければ得られない。これにより式を解くことがより難しくなっている。

本研究では逐次代入法を用いた計算により解くことにした。しかしただの逐次代入法では右辺の積分に含まれる $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m)$ がわからないため計算ができない。そのため左辺の $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m)$ の値を境界値としてロンドン方程式を解きその解を右辺の積分に含まれる $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m)$ に代入する。これを繰り返すことで数値解を求めることを試みた。

3.4 ビオ・サバルの法則の変形

ベクトル場を数値計算により解析するためにそれぞれの成分に分けて考える。ここでは境界条件に含まれるビオ・サバルの法則を円筒座標系の成分ごとに分けて数値計算に適用できるように式変形を行う。

境界条件に含まれるビオ・サバルの法則は

$$\mathbf{B}_{sup}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) = \mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'^3 \quad (3.4.1)$$

と書ける。まず、 $(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}')$ について円筒成分に分けて考えると次のように変形される。

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}') &= (\rho_s \mathbf{e}_\rho(\varphi_s) + z_s \mathbf{e}_z) - (\rho' \mathbf{e}_\rho(\varphi') + z' \mathbf{e}_z) \\ &= (\rho_s \cos(\varphi_s - \varphi') - \rho') \mathbf{e}_\rho(\varphi') + (\rho_s \sin(\varphi_s - \varphi')) \mathbf{e}_\varphi(\varphi') + (z_s - z') \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

この変形では図 3.4 から次の関係を用いた。

$$\mathbf{e}_\rho(\varphi_s) = \cos(\varphi_s - \varphi')\mathbf{e}_\rho(\varphi') + \sin(\varphi_s - \varphi')\mathbf{e}_\varphi(\varphi') \quad (3.4.3)$$

よって、 $(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}')$ の大きさは次のようになる。

$$|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s\rho'\cos(\varphi_s - \varphi') + (z_s - z')^2} \quad (3.4.4)$$

$(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}')$ と電流密度の外積をとると次のようになる。

$$\begin{aligned} J_{\text{in}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}') &= (J_{\text{in}\varphi}(z_s - z') - J_{\text{inz}\rho_s}\sin(\varphi_s - \varphi'))\mathbf{e}_\rho(\varphi') \\ &+ (J_{\text{inz}(\rho_s\cos(\varphi_s - \varphi') - \rho')} - J_{\text{in}\rho}(z_s - z'))\mathbf{e}_\varphi(\varphi') \\ &+ (J_{\text{in}\rho}\rho_s\sin(\varphi_s - \varphi') - J_{\text{in}\varphi}(\rho_s\cos(\varphi_s - \varphi') - \rho'))\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

\mathbf{B}_{sup} ができる座標は (ρ_s, φ_s, z_s) なので $\mathbf{e}_\rho(\varphi')$ や $\mathbf{e}_\varphi(\varphi')$ でなくて $\mathbf{e}_\rho(\varphi_s)$ や $\mathbf{e}_\varphi(\varphi_s)$ で表したい。そこで次のように変形する。

$$\begin{aligned} J_{\text{in}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}') &= (-J_{\text{in}\rho}(z_s - z')\sin(\varphi_s - \varphi') + J_{\text{in}\varphi}(z_s - z')\cos(\varphi_s - \varphi') \\ &- J_{\text{inz}\rho'}\sin(\varphi_s - \varphi'))\mathbf{e}_\rho(\varphi_s) \\ &+ (-J_{\text{in}\rho}(z_s - z')\cos(\varphi_s - \varphi') - J_{\text{in}\varphi}(z_s - z')\sin(\varphi_s - \varphi') + J_{\text{inz}\rho_s} \\ &- J_{\text{inz}\rho'}\cos(\varphi_s - \varphi'))\mathbf{e}_\varphi(\varphi_s) \\ &+ (J_{\text{in}\rho}\rho_s\sin(\varphi_s - \varphi') - J_{\text{in}\varphi}(\rho_s\cos(\varphi_s - \varphi') - \rho'))\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

ここでは図 3.4 から次の関係を用いた

$$\mathbf{e}_\rho(\varphi') = \cos(\varphi_s - \varphi')\mathbf{e}_\rho(\varphi_s) - \sin(\varphi_s - \varphi')\mathbf{e}_\varphi(\varphi_s) \quad (3.4.7)$$

$$\mathbf{e}_\varphi(\varphi') = \sin(\varphi_s - \varphi')\mathbf{e}_\rho(\varphi_s) + \cos(\varphi_s - \varphi')\mathbf{e}_\varphi(\varphi_s) \quad (3.4.8)$$

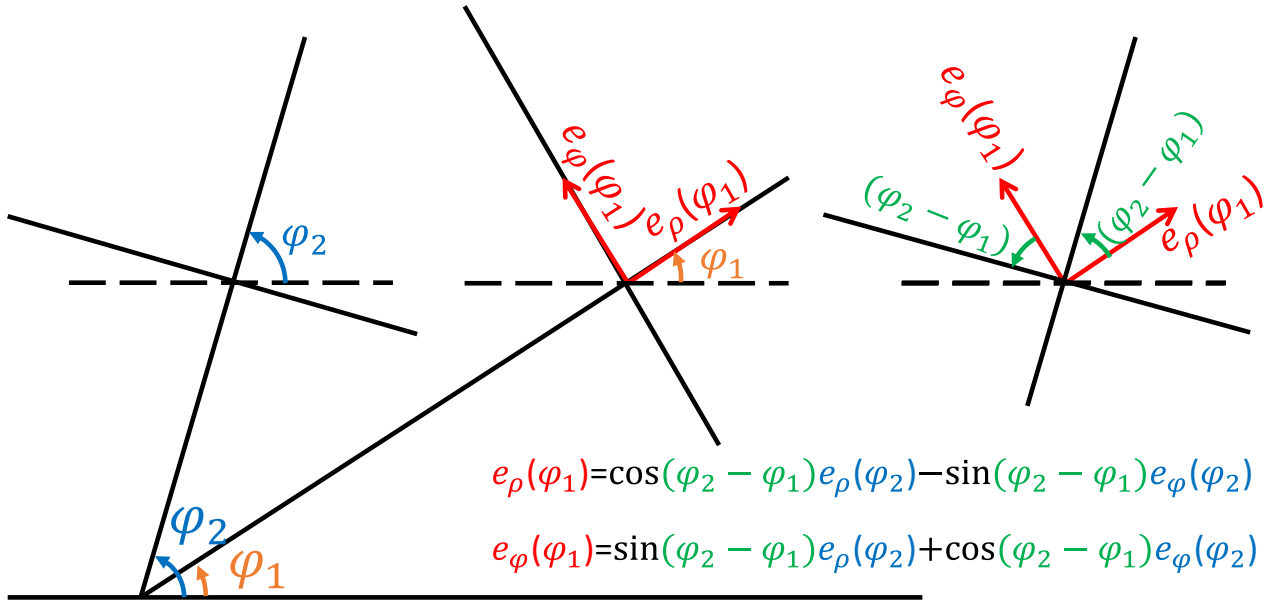


図 3.4 円筒座標系における単位ベクトルの変換

結局、円筒座標系でのビオ・サバルの法則は次のように変形された。

$$B_{\text{Sup}\rho}(\rho_s, \varphi_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{-J_{\text{in}\rho}(z_s - z') \sin(\varphi_s - \varphi') + J_{\text{in}\varphi}(z_s - z') \cos(\varphi_s - \varphi') - J_{\text{inz}} \rho' \sin(\varphi_s - \varphi')}{\sqrt{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s \rho' \cos(\varphi_s - \varphi') + (z_s - z')^2}} \rho' d\rho' d\varphi' dz' \quad (3.4.9)$$

$$B_{\text{Sup}\varphi}(\rho_s, \varphi_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{-J_{\text{in}\rho}(z_s - z') \cos(\varphi_s - \varphi') - J_{\text{in}\varphi}(z_s - z') \sin(\varphi_s - \varphi') + J_{\text{inz}} \rho_s - J_{\text{inz}} \rho' \cos(\varphi_s - \varphi')}{\sqrt{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s \rho' \cos(\varphi_s - \varphi') + (z_s - z')^2}} \rho' d\rho' d\varphi' dz' \quad (3.4.10)$$

$$B_{\text{Sup}z}(\rho_s, \varphi_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_{\text{in}\rho} \rho_s \sin(\varphi_s - \varphi') - J_{\text{in}\varphi} (\rho_s \cos(\varphi_s - \varphi') - \rho')}{\sqrt{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s \rho' \cos(\varphi_s - \varphi') + (z_s - z')^2}} \rho' d\rho' d\varphi' dz' \quad (3.4.11)$$

もし、 z 方向の積分範囲が無限だとすると z についての積分は解析的に行える。その場合考えなければならぬ積分は次の二つである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{A^2 + (z_s - z')^2}^3} \quad (3.4.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_s - z') dz'}{\sqrt{A^2 + (z_s - z')^2}^3} \quad (3.4.13)$$

まず式(3.4.12)について考える。まず、 $z'' = z_s - z'$ と置くと $dz' = -dz''$ となり、積分範囲は ∞ から $-\infty$ となる。式で書くと次のように書ける。

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{-dz''}{\sqrt{A^2 + z''^2}^3}$$

この式の符号を整えると次のようになる

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz''}{\sqrt{A^2 + z''^2}^3}$$

ここで $z'' = A \tan \theta$ と置くと $dz'' = \frac{A}{\cos^2 \theta} d\theta$ となり、範囲は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ となる。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{A^2 + (A \tan \theta)^2}^3} \frac{A}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{A^3 \sqrt{1 + \tan^2 \theta}^3} \frac{A}{\cos^2 \theta} d\theta$$

ここで $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を用いて次のようにする。

$$\frac{1}{A^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^3} \cos^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{A^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

この積分は簡単に求められる。

$$\frac{1}{A^2} [\sin \theta]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{A^2}$$

続いて式(3.4.13)について考える。まず、 $z'' = z_s - z'$ と置くと $dz' = -dz''$ となり、積分範囲は ∞ から $-\infty$ となる。式で書くと

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{-z'' dz''}{\sqrt{A^2 + z''^2}^3}$$

この式の符号を整えると次のようになる

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'' dz''}{\sqrt{A^2 + z''^2}^3}$$

ここで $z'' = A \tan \theta$ と置くと $dz'' = \frac{A}{\cos^2 \theta} d\theta$ となり、範囲は $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ となる。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{A \tan \theta}{\sqrt{A^2 + (A \tan \theta)^2}^3} \frac{A}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{A \tan \theta}{A^3 \sqrt{1 + \tan^2 \theta}^3} \frac{A}{\cos^2 \theta} d\theta$$

ここで $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ を用いて次のようにする。

$$\frac{1}{A} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \theta}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^3} \cos^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{1}{A} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \theta \cos \theta d\theta$$

$$\frac{1}{A} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 0$$

この二つの結果よりビオ・サバル式を直し、面積積分とすると次のようになる。

$$B_{Sup\rho}(\rho_s, \varphi_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \frac{-J_{inz}\rho' \sin(\varphi_s - \varphi')}{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s\rho' \cos(\varphi_s - \varphi')} \rho' d\rho' d\varphi' \quad (3.4.14)$$

$$B_{Sup\varphi}(\rho_s, \varphi_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \frac{J_{inz}\rho_s - J_{inz}\rho' \cos(\varphi_s - \varphi')}{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s\rho' \cos(\varphi_s - \varphi')} \rho' d\rho' d\varphi' \quad (3.4.15)$$

$$B_{Supz}(\rho_s, \varphi_s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \frac{J_{in\rho}\rho_s \sin(\varphi_s - \varphi') - J_{in\varphi}(\rho_s \cos(\varphi_s - \varphi') - \rho')}{\rho_s^2 + \rho'^2 - 2\rho_s\rho' \cos(\varphi_s - \varphi')} \rho' d\rho' d\varphi' \quad (3.4.16)$$

3.5 二重指数関数型数値積分法によるビオ・サバルの法則の計算

ビオ・サバルの法則の積分に対して二重指数型数値積分法を適用する。電流の存在する点の磁束密度をビオ・サバルの法則によって計算すると被積分関数は特異点を持つ関数となる。例として半径 a の無限円柱電流のつくる磁束密度を考える。ここで位置 $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_\rho(b)$ につくられる φ 方向の磁束密度を計算するとき、被積分関数は以下のように書ける。

$$F(\rho', \varphi') = \frac{J_{inz}a - J_{inz}\rho' \cos(b - \varphi')}{a^2 + \rho'^2 - 2a\rho' \cos(b - \varphi')} \rho' \quad (3.5.1)$$

この関数をグラフで示すと次のようになる。

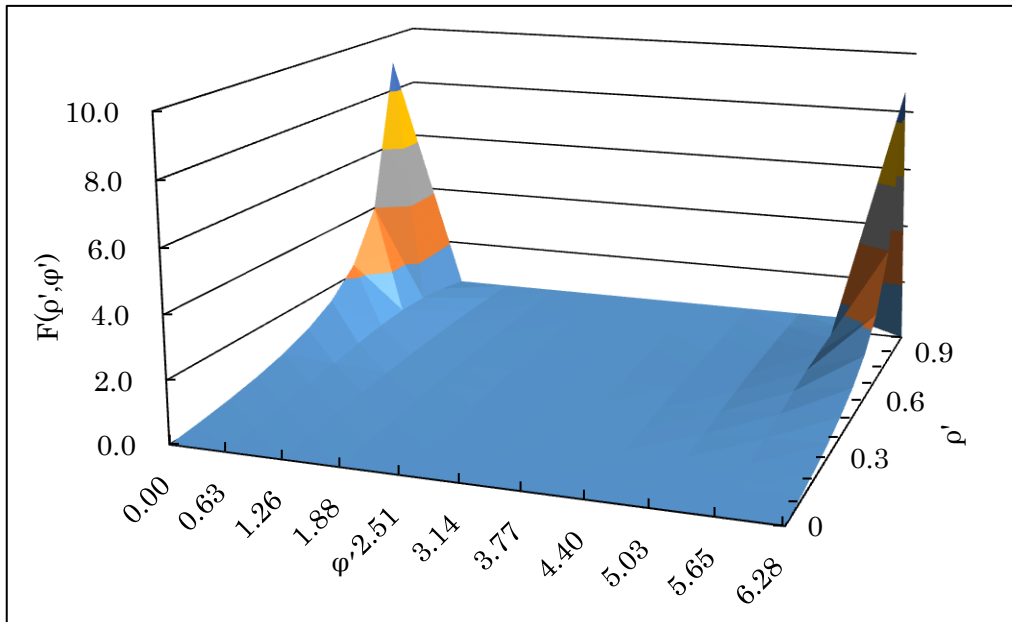


図 3.5 ビオ・サバルの法則の被積分関数関数

図 3.5 より、この関数は $\rho' = a, \varphi' = b + 2n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ のとき特異点を持つ。そこで二重指数型数値積分法を用いる。変数変換は特異点が積分範囲の端点に来るようにすることが必要である。

$$\rho' = a \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) \quad (3.5.2)$$

$$d\rho' = a \frac{\frac{\pi}{2} \cosh \rho''}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right)} d\rho'' \quad (3.5.3)$$

$$\varphi' = \frac{(b + 2\pi) - b}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) + \frac{(b + 2\pi) + b}{2} = \pi \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) + b + \pi \quad (3.5.4)$$

$$d\varphi' = \pi \frac{\frac{\pi}{2} \cosh \rho''}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right)} d\rho'' \quad (3.5.5)$$

この変換により被積分関数は次のように書き直される。

$$F(\rho'', \varphi'') = \frac{J_{\text{inz}} a - J_{\text{inz}} a \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) \cos\left(-\pi \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) - \pi\right)}{a^2 + \left(a \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right)\right)^2 - 2aa \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) \cos\left(-\pi \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) - \pi\right)} a \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right) a \frac{\frac{\pi}{2} \cosh \rho''}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right)} \pi \frac{\frac{\pi}{2} \cosh \rho''}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh \rho''\right)} \quad (3.5.1)$$

この関数のグラフを以下に示す。

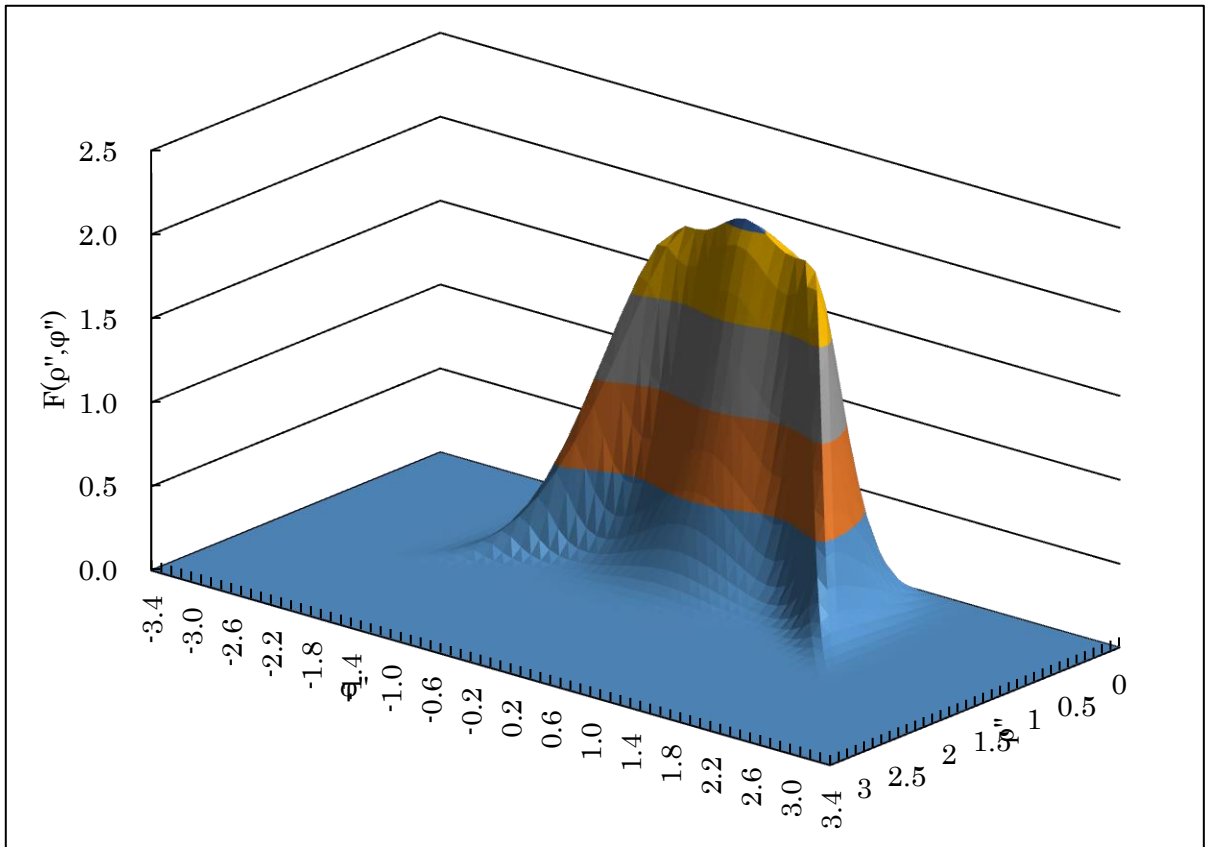


図 3.6 二重指数変数変換を施したビオ・サバールの法則の被積分関数関数

これにより特異点はなくなり台形公式の数値積分でも精度よく計算できると考えられる。

3.6 計算アルゴリズム

磁石の浮上位置を求めるためには次の 3 式を連立して解く必要がある。

ロンドン方程式

$$\nabla^2 \mathbf{B}_{in} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}_{in} \quad (3.6.1)$$

境界条件

$$\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) = \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m) + \int_V \frac{(\nabla \times \mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_m)) \times (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'^3 \quad (3.6.2)$$

つり合いの式

$$-\frac{1}{\mu_0} \int_V (\nabla \times \mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)) \times \mathbf{B}_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m) d\mathbf{r}^3 - M\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (3.6.3)$$

ロンドン方程式を解くためにはガウス・ザイデルの反復法の繰り返し構造が必要となる。境界条件を解くためには逐次代入法の繰り返し構造が必要で、つり合いの式を解くためにはニュートン法の繰り返し構造が必要となる。そのため 3 式を連立して解くにはニュートン法の繰り返し構造の内側に逐次代入法の繰り返し構造が必要で、さらに逐次代入法の繰り返し構造の内側にガウス・ザイデルの反復法の繰り返し構造が必要となる。つまり三重の繰り返し構造が必要となる。この 3 式を解くためには次のような計算が必要である。

- (1) 磁石の初期位置を決める。
- (2) 磁石の位置から外部磁束密度 \mathbf{B}_{ex} をもとめ境界条件の式に入れる。
- (3) 境界条件の右辺を右辺第二項を無視して計算し、 $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s)$ を求める。
- (4) $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s)$ を境界値としてロンドン方程式をガウス・ザイデルの反復法により解く。
- (5) ロンドン方程式の解を境界条件の右辺第二項に適用し右辺を計算し $\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}_s)$ を求める。
- (6) (3)(4) を繰り返す(逐次代入法)ことにより境界条件とともに解かれたロンドン方程式の解を得る。
- (7) (6) の結果を用いてつり合いの式を計算する。
- (8) ニュートン法によって磁石の位置を決めなおす。
- (9) (2) から(8) までをニュートン法が収束するまで繰り返す。

この浮上位置計算のアルゴリズムについて図 3.7 に図示した。

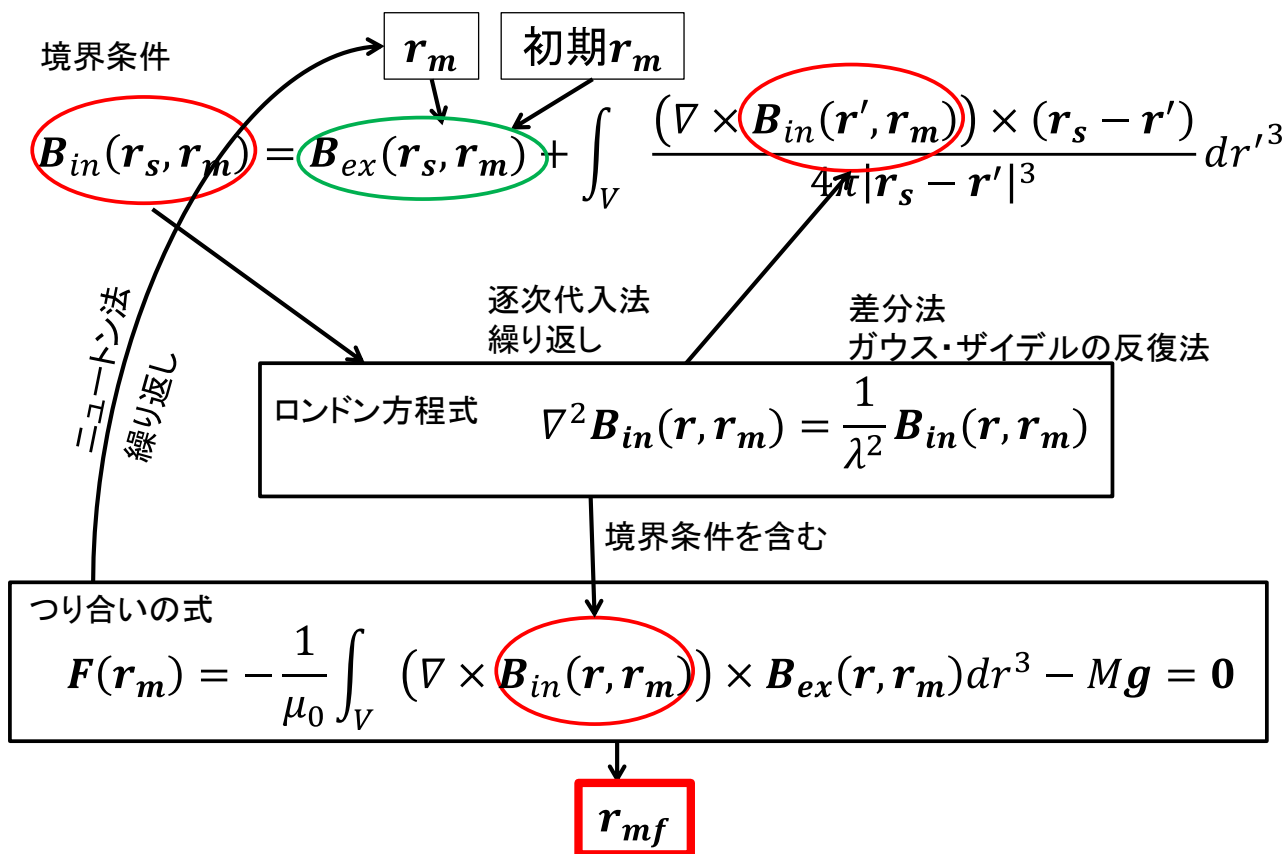


図 3.7 浮上位置計算のアルゴリズム

第四章 磁石の浮上位置測定

超伝導体 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ を作成し、超伝導体の上に浮上する磁石の位置を測定した。

4.1 超伝導体の作製

超伝導体 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ の作成について述べる。モル比が $\text{Y}:\text{Ba}:\text{Cu}=1:2:3$ となるように Y_2O_3 、 BaO_2 、 CuO を混合した。混合した試薬をプレス機に入れ圧力をかけて形成し、ペレットとした。小さいルツボ内にガラスウールとペレットと同組成の粉末をに入れておき、そこに形成したペレットを入れた。さらに小さいルツボ内に粉末をペレットが隠れるように入れた。その上にガラスウールを入れ、小さいルツボの蓋を閉めて、大きいるつぼに入れた。大きいるつぼにガラスウールを入れて、ふたをしめ、電子レンジで $200\text{W}40$ 分加熱した。その後、ペレットを十分放冷した。

4.2 浮上位置の測定

超伝導体上の磁石の浮上位置の測定を行った。

ペレットに液体窒素をかけてうえに磁石を浮上させた。浮上の様子を図 4.1 に示す。図 4.1 と磁石の大きさから浮上位置を求めた。磁石の浮上位置は超伝導体表面から 0.006m だった。

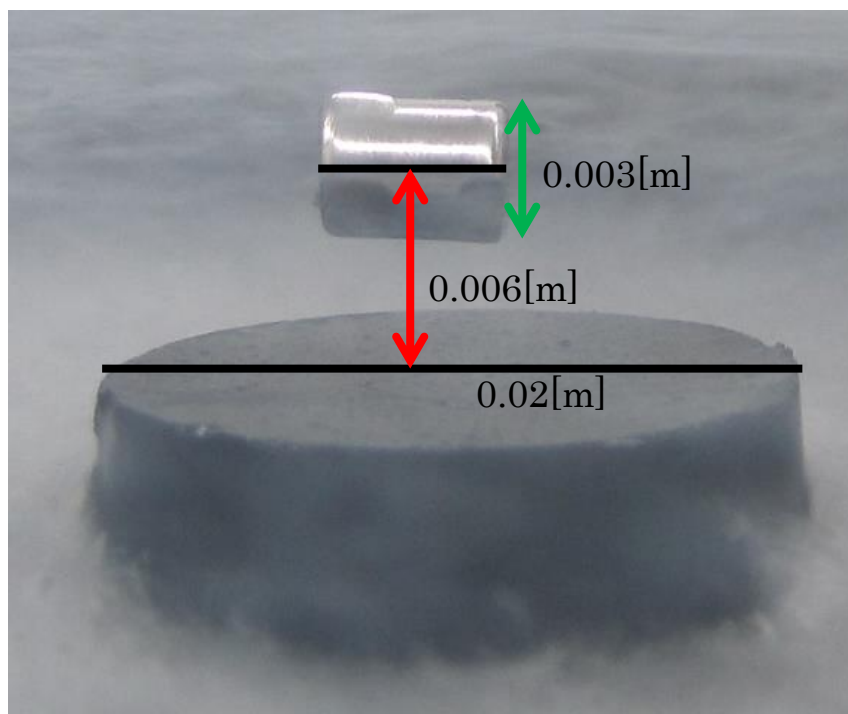


図 4.1 超伝導体上に浮上する磁石の様子

第五章 結果と考察

本研究で行った数値計算の結果を示す。

まず、ロンドン方程式を差分法とガウス・ザイデルの反復法で解き、解析解と比較した。次に二重指数型数値積分法を用いて解析的に結果を得られる異常積分を計算し、この積分法で異常積分の計算が行えるか検証する。さらに無限円柱電流周りの磁場をビオ・サバルの法則と二重指数型数値積分法を用いて数値計算を行い、解析的な結果と比較する。これにより、二重指数型数値積分法によりビオ・サバルの法則の異常積分が計算できるか検証する。

無限円柱状超伝導体に一樣な磁場をかけた場合について電磁場解析を行った。この計算にはロンドン方程式と境界条件式(3.3.5)を用いた。この問題は2.3.4で解析的に解かれているため、数値解と解析解を比較することで境界条件とその計算方法の検証を行った。

最後に無限円柱状超伝導体に磁石を浮上させた場合の電磁場解析を行い、磁石の浮上位置を計算した。

5.1 ロンドン方程式の差分解

ロンドン方程式を差分法とガウス・ザイデルの反復法によって解いた。無限平板超伝導体と無限円柱状超伝導体について計算を行った。これらの条件は解析的に解かれているため、計算結果と解析解を比べることで差分法とガウス・ザイデルの反復法によってロンドン方程式が正しく解かれているか検証する。

5.1.1 無限平板超伝導体のロンドン方程式の差分解

2.3.3で解析的に解いた無限平板超伝導体のロンドン方程式の差分解を求める。具体的な超伝導体の範囲以下のように定義した。

$$x = \pm\infty, y = \pm\infty, -1.0 \leq z \leq 1.0 \quad (5.1.1)$$

また、境界条件として超伝導体表面での磁束密度 $\mathbf{B}_0 = (1,0,0)$ を与えた。磁場侵入長を0.5、0.1、0.01とし計算を行い、結果をそれぞれ図5.1、図5.2、図5.3に示した。

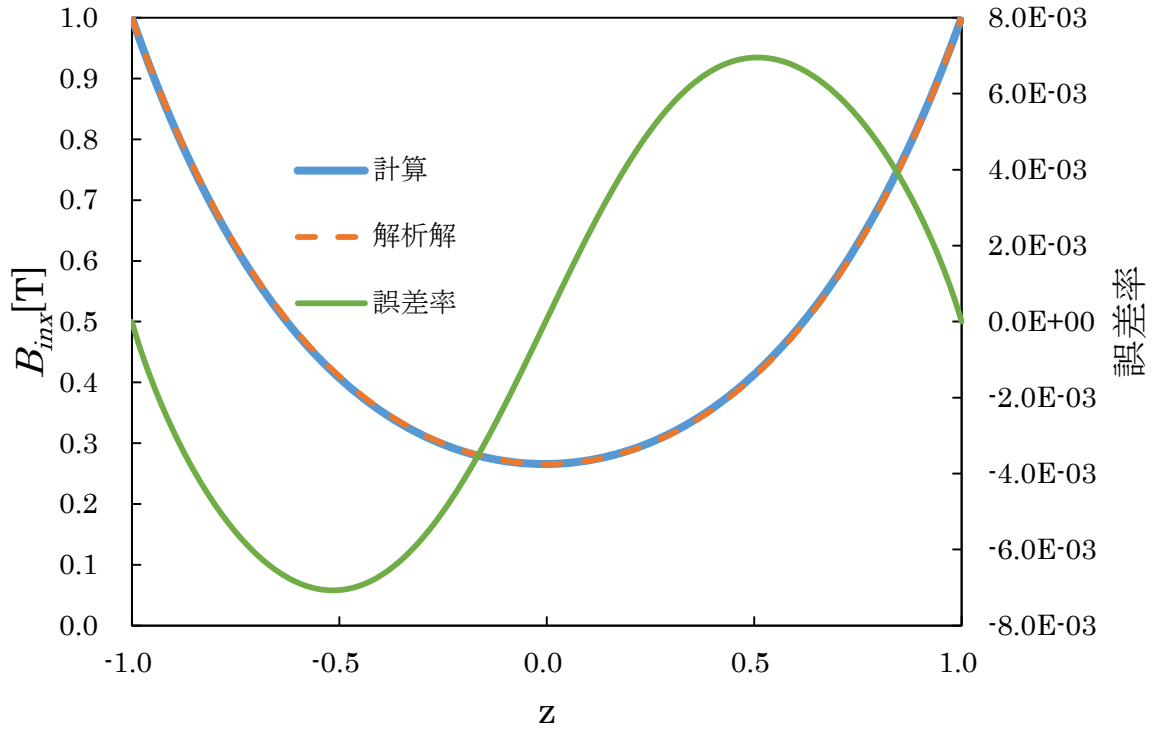


図 5.1 無限平板超伝導体におけるロンドン方程式の差分解($\lambda=0.5$)

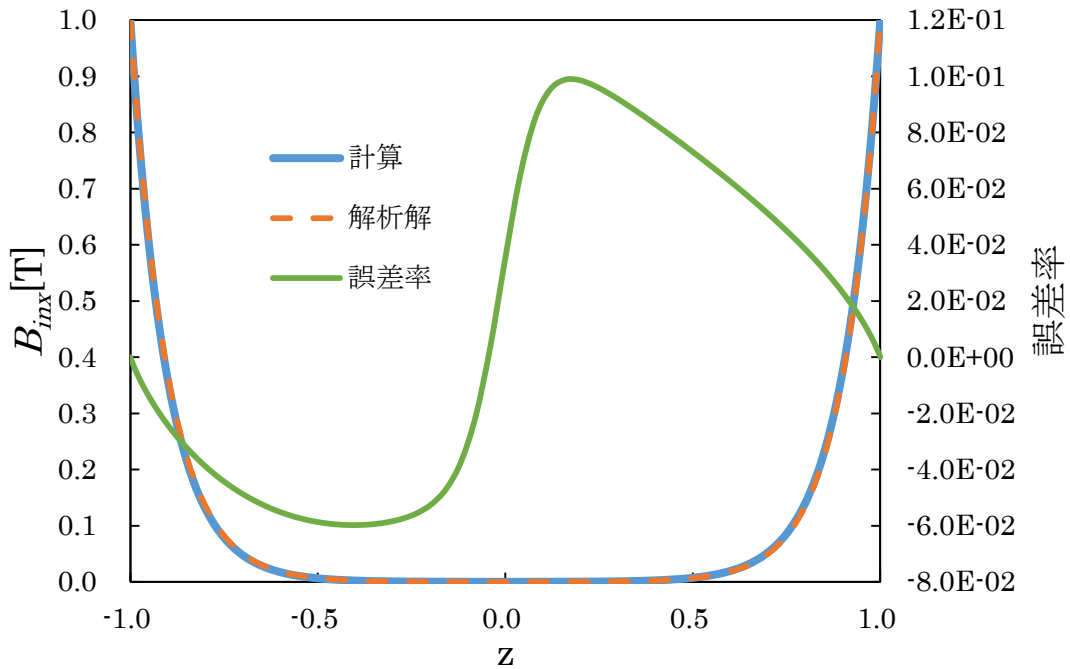


図 5.2 無限平板超伝導体におけるロンドン方程式の差分解($\lambda=0.1$)

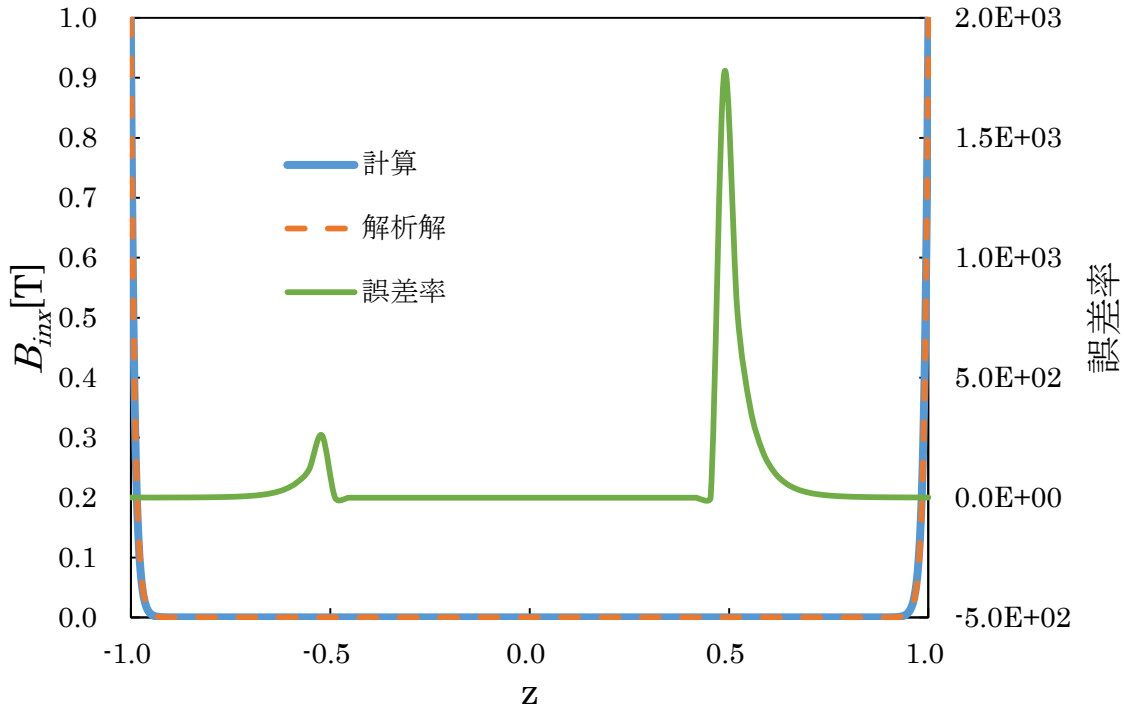


図 5.3 無限平板超伝導体におけるロンドン方程式の差分分解($\lambda=0.01$)

これらの結果を見ると計算解は解析解とよく一致し、無限平板超伝導体のロンドン方程式は差分法によって正しい解が得られることがわかった。

5.1.2 無限円柱状超伝導体のロンドン方程式の差分分解

境界値を与えられた無限円柱状超伝導体のロンドン方程式を差分法とガウス・ザイデルの反復法によって解くことができるか検証する。無限円柱状超伝導体は半径 1.0 高さ無限大の範囲にあるとする。ここで外部磁場 $\mathbf{B}_{ex} = B_{ex}\mathbf{e}_x$ を加えたときの超伝導体内部の磁束密度をロンドン方程式を解くことで求める。ただし境界値は解析解式(2.3.4.28)の結果を用いる。

計算結果を以下に示す。円筒座標系を用いて計算した。図 5.4 は $\varphi = 0$ での ρ 方向の磁束密度 B_ρ の結果を示す。横軸に ρ を取り ρ 方向の磁束密度 B_ρ の ρ 変化を示している。図 5.5 は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ での φ 方向の磁束密度 B_φ の結果を示す。横軸に ρ を取り φ 方向の磁束密度 B_φ の ρ 変化を示している。図 5.6 は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ での z 方向の電流密度 J_z の結果を示す。横軸に ρ を取り z 方向の電流密度 J_z の ρ 変化を示している。

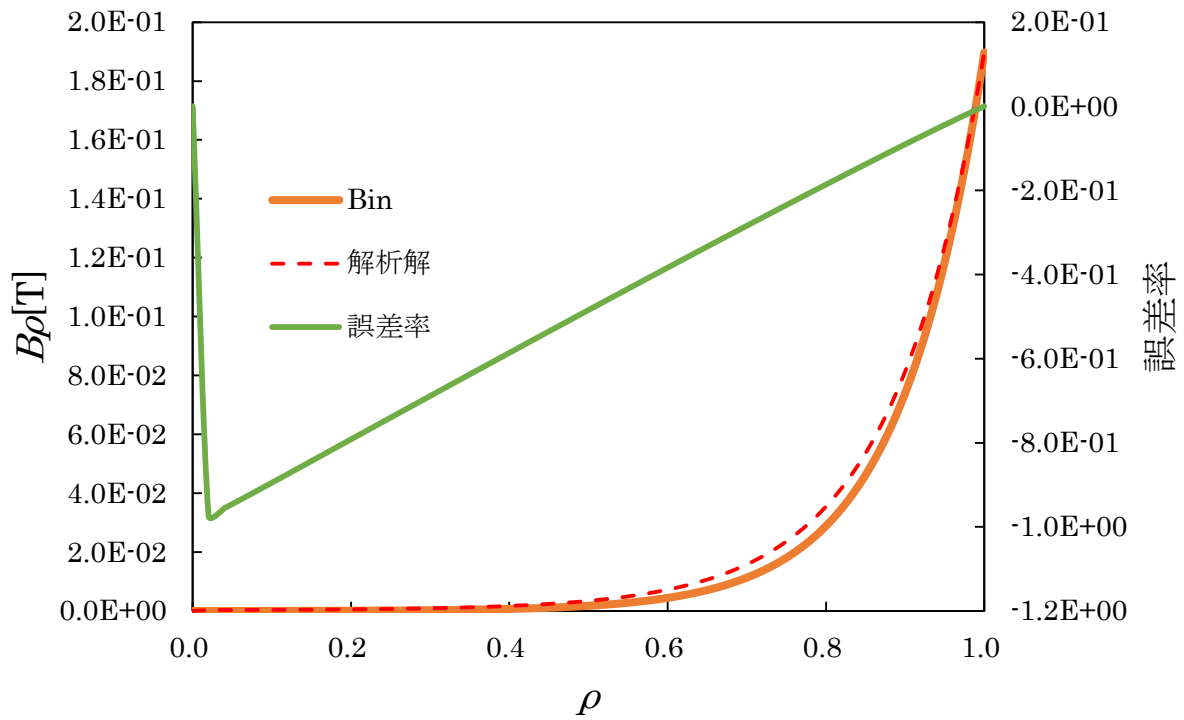


図 5.4 無限円柱状超伝導体におけるロンドン方程式の B_ρ についての差分解 ($\varphi = 0$)

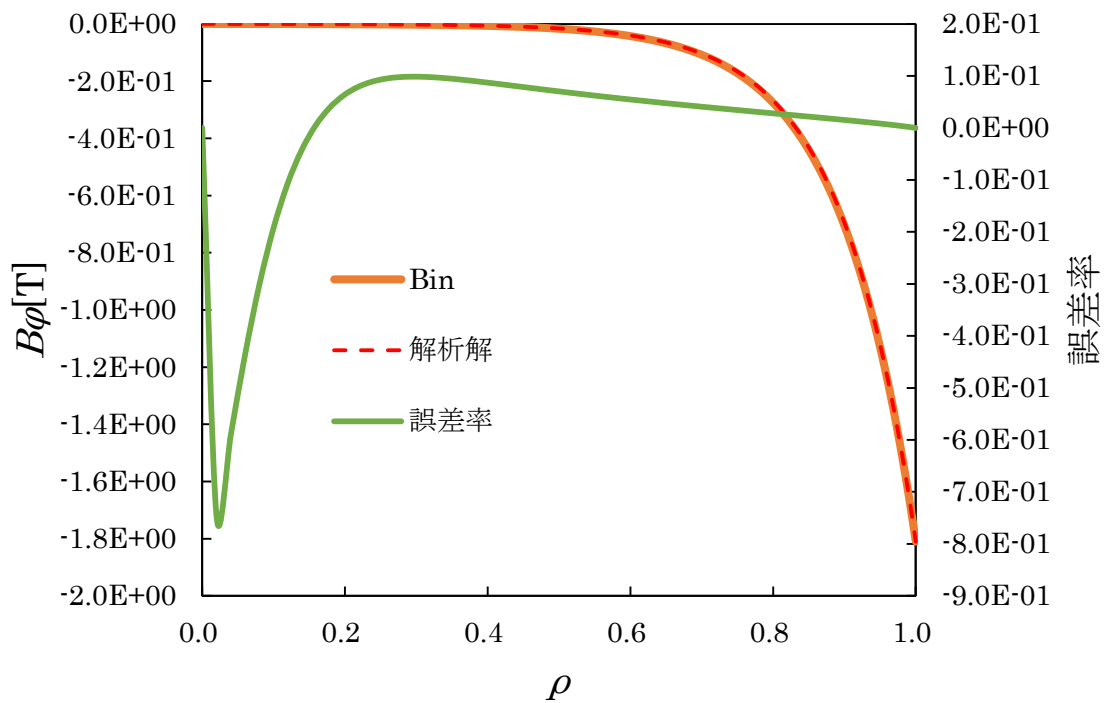


図 5.5 無限円柱状超伝導体におけるロンドン方程式の B_φ についての差分解 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

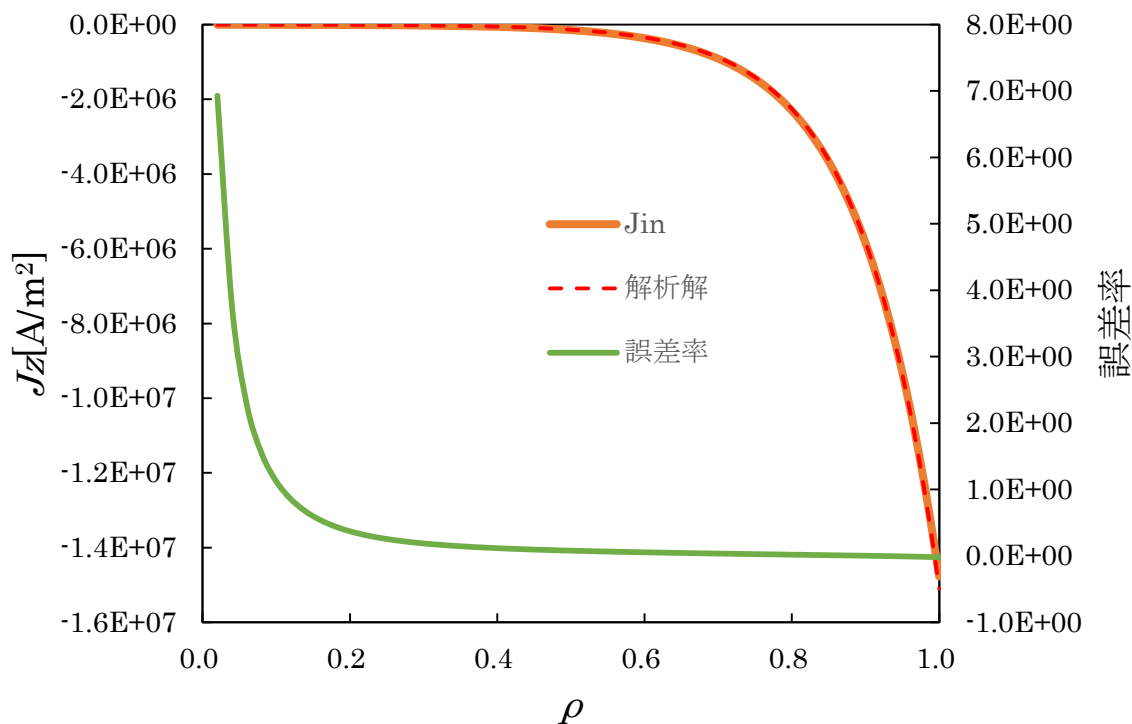


図 5.6 無限円柱状超伝導体におけるロンドン方程式の J_z についての差分解($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

これらの結果から計算解は解析解とよく一致し、境界値が与えられている場合の無限円柱状超伝導体のロンドン方程式は差分法によって正しい解が得られることがわかった。

5.2 二重指数関数型数値積分法による異常積分の計算

二重指数関数型数値積分法によって異常積分の計算が行えるか検証する。そこで積分範囲の端点に特異点を持つ次のような積分を考える。

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}x]_{-1}^1 = \pi$$

台形公式と二重指数型数値積分法によりこの積分を計算した。計算点を増やした時、積分値が真の値に近づくか調べる。その結果を図 5.7 に示す。

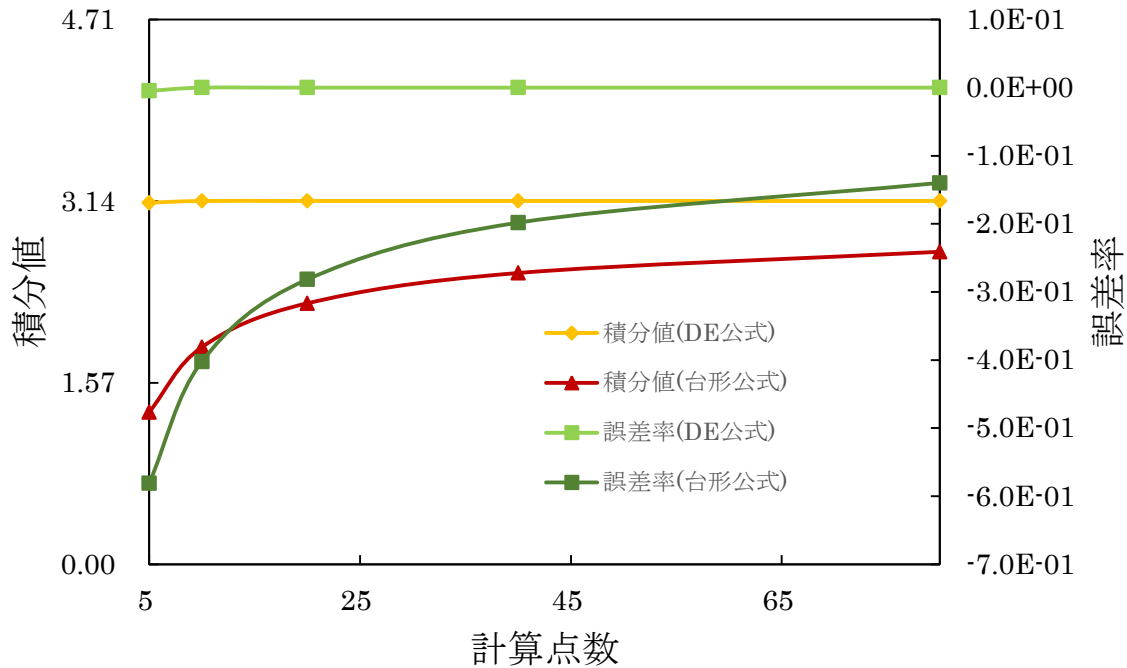


図 5.7 台形公式と DE 公式による $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ の計算値の計算点数に対する変化

図 5.7 によると台形公式に比べ二重指数型積分公式のほうが真の値に近くなることがわかる。台形公式はこのような積分範囲の端点に特異点を持つような積分では精度は低く誤差率が大きくなってしまふ。二重指数型数値積分公式を用いると積分範囲の端点に特異点を持つような積分でも精度よく計算できることが分かった。したがってこの公式を用いてビオ・サバールの法則の積分を計算することで精度の高い結果が得られると考えられる。

5.3 ビオ・サバールの法則による円柱電流周りの磁場

ビオ・サバールの法則を用いて無限円柱電流周りの磁場を計算し、ビオ・サバールの法則に二重指数関数型数値積分法を適用させた場合の精度を確認する。

2.2.3 で例として扱った問題をビオ・サバールの法則の二重指数関数型数値積分法によって解く。電流の流れている半径は 1、電流密度は $1[\text{A}/\text{m}^2]$ とする。円筒座標系を用いて計算した。図 5.8 は φ 方向の磁束密度 B_φ の結果を示す。横軸に ρ を取り φ 方向の磁束密度 B_φ の ρ 変化を示している。

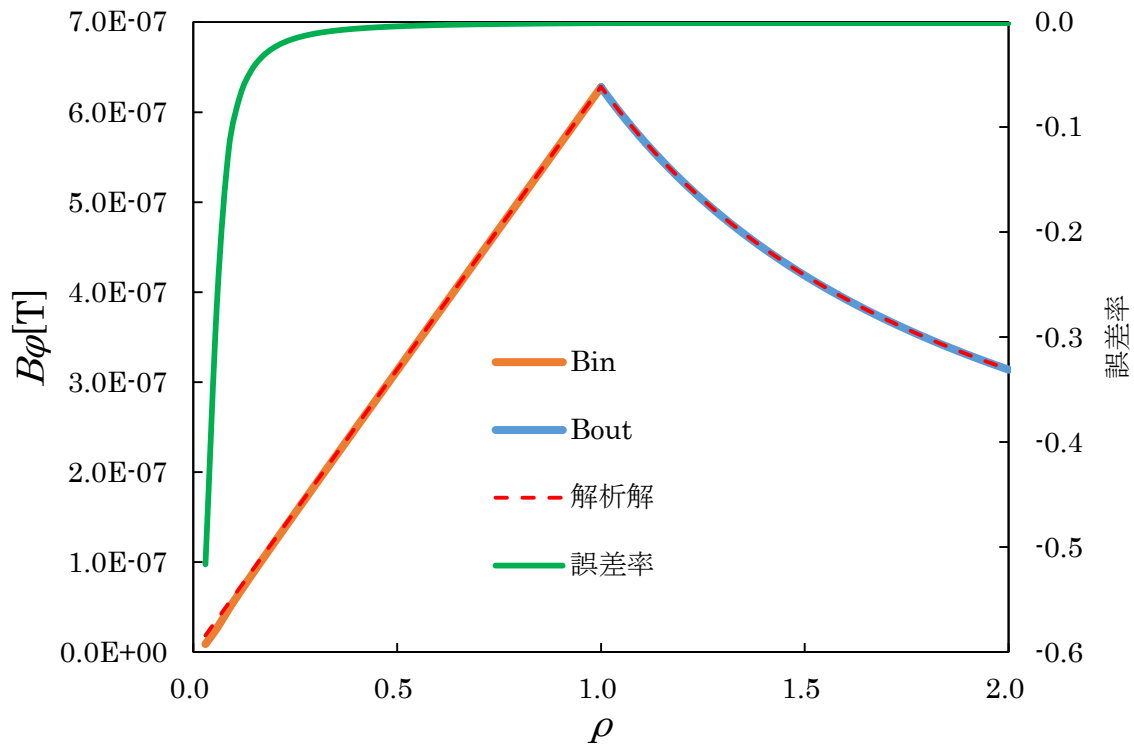


図 5.8 ビオ・サバルの法則の DE 公式による計算によって得られた無限円柱電流周りの磁場

図 5.8 によると計算結果は解析解とよく一致し、ビオ・サバルの法則に二重指数関数型数値積分法を適用することで十分な結果を得ることが分かった。 ρ が 0 に近づくと誤差率が大きくなるのは誤差率を計算する際小さな値で割るためである。

5.4 無限円柱型超伝導体を含む電磁場の解析

無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の電磁場の解析を行う。この問題は 2.3.4 で解析的に解かれている。この計算では式(3.3.5)の境界条件を用いる。式(3.3.5)は本研究で考案したためその正当性は評価されていない。そのためこの計算によって境界条件を評価する。また逐次代入法によって境界条件が正しく解かれるかも調べる。

そこで次の表に示すような条件で計算を行った。無限円柱状超伝導体の半径 0.01 磁場侵入長 0.0001 とし、外部磁場 $\mathbf{B}_{ex} = 1.0\mathbf{e}_x$ を加えた。

まず電磁場解析の結果を図 5.9～5.15 図に示す。図 5.9 は $\varphi = 0$ での ρ 方向の磁束密度 B_ρ の結果を示す。横軸に ρ を取り ρ 方向の磁束密度 B_ρ の ρ 変化を示している。図 5.10 は $\rho = 0.01$ での ρ 方向の磁束密度 B_ρ の結果を示す。横軸に φ を取り ρ 方向の磁束密度 B_ρ の φ 変化を示している。図 5.11 は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ での φ 方向の磁束密度 B_φ の結果を示す。横軸に ρ を取り φ 方向の磁束密度 B_φ の ρ 変化を示している。図 5.12 は $\rho = 0.01$ での φ 方向の磁束密度 B_φ の結果を示す。横軸に φ を取り φ 方向の磁束密度 B_φ の φ 変化を示している。図 5.13 は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ での z 方向の電流密度 J_z の結果を示す。横軸に ρ を取り z 方向の電流密度 J_z の ρ 変化を示し

ている。図 5.14 は $\rho = 0.01$ での z 方向の電流密度 J_z の結果を示す。横軸に φ を取り z 方向の電流密度 J_z の φ 変化を示している。図 5.9～図 5.14 には解析解と誤差率も示す。また、図 5.15 には超伝導体周辺の磁束線の様子の計算結果を示す。

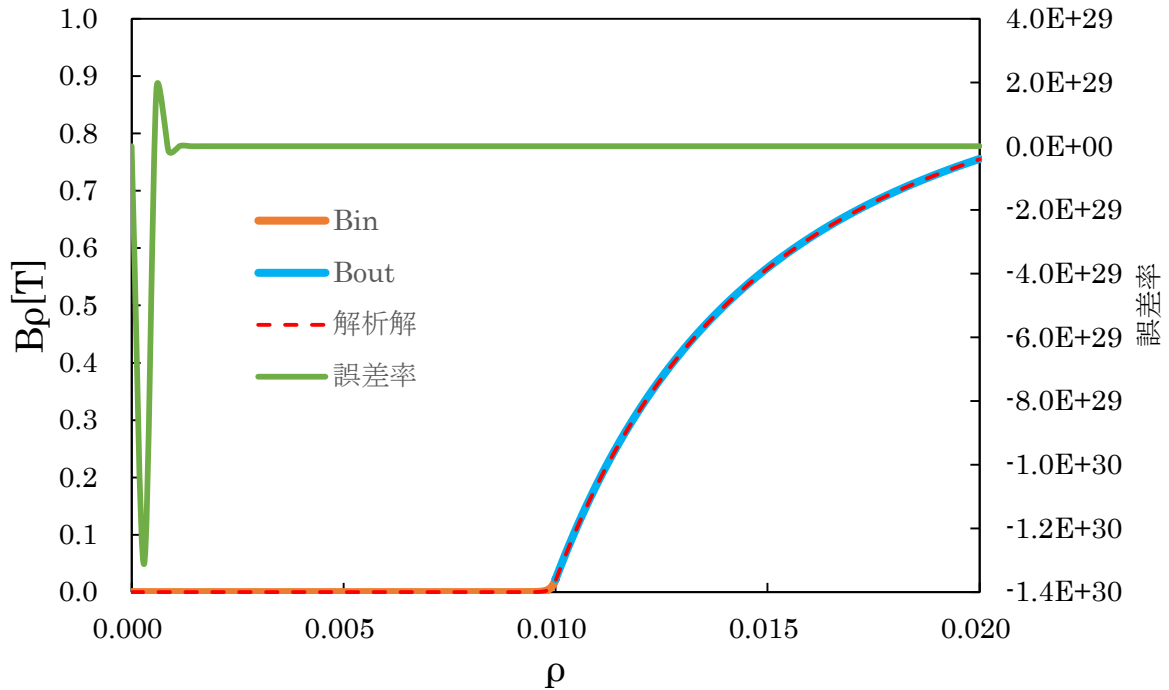


図 5.9 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の B_ρ の ρ 変化 ($\varphi = 0$)

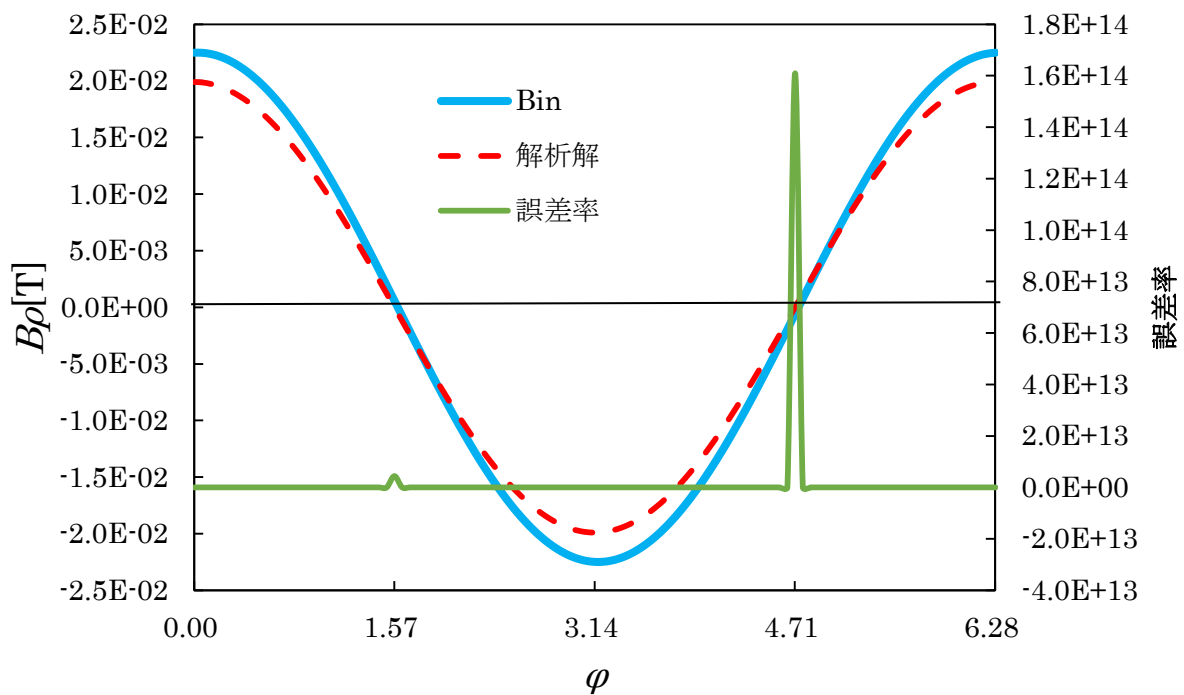


図 5.10 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の B_ρ の φ 変化 ($\rho = 0.010$)

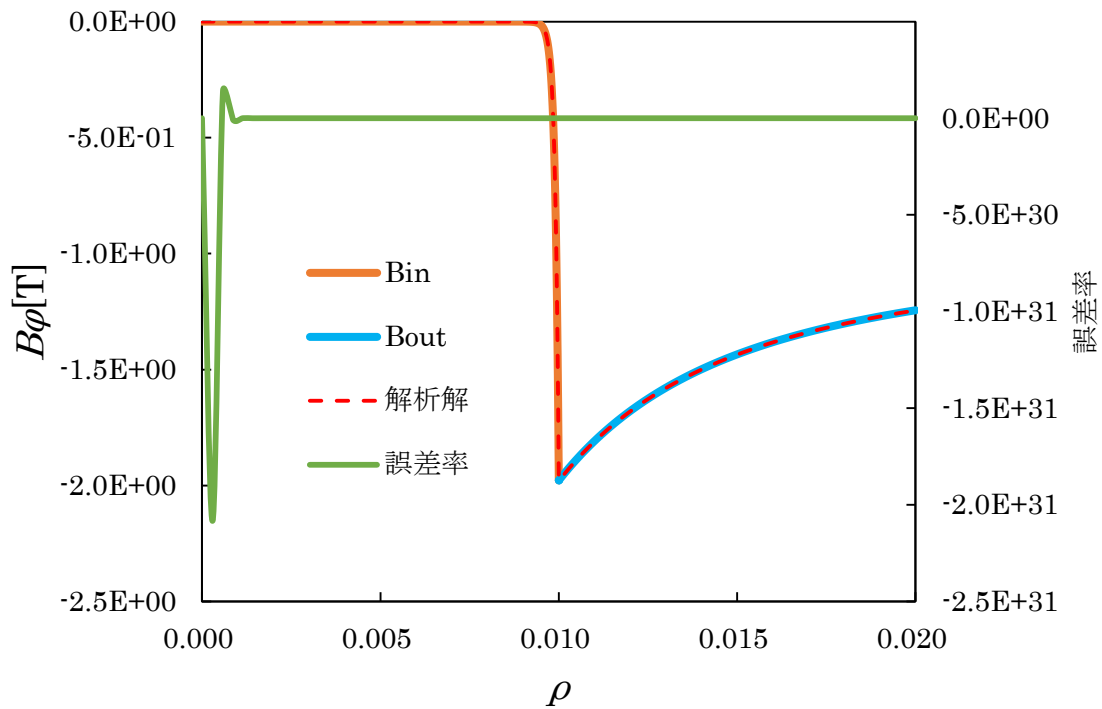


図 5.11 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の $B\varphi$ の ρ 変化 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

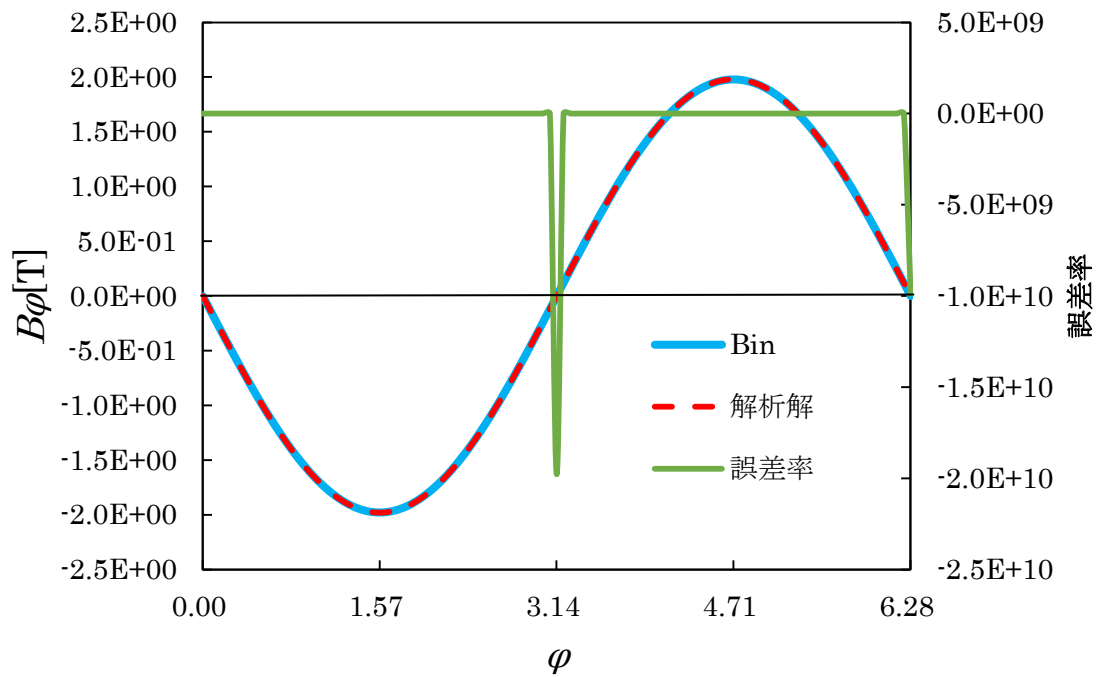


図 5.12 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の $B\varphi$ の φ 変化 ($\rho = 0.010$)

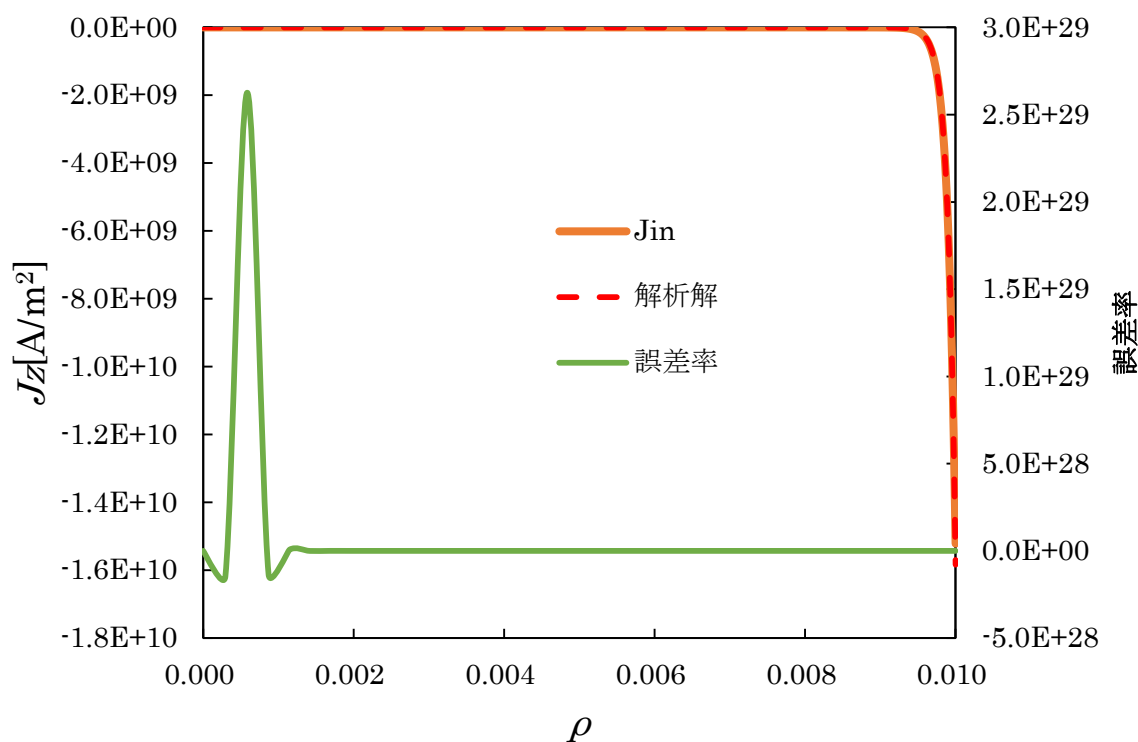


図 5.13 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の J_z の ρ 変化 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

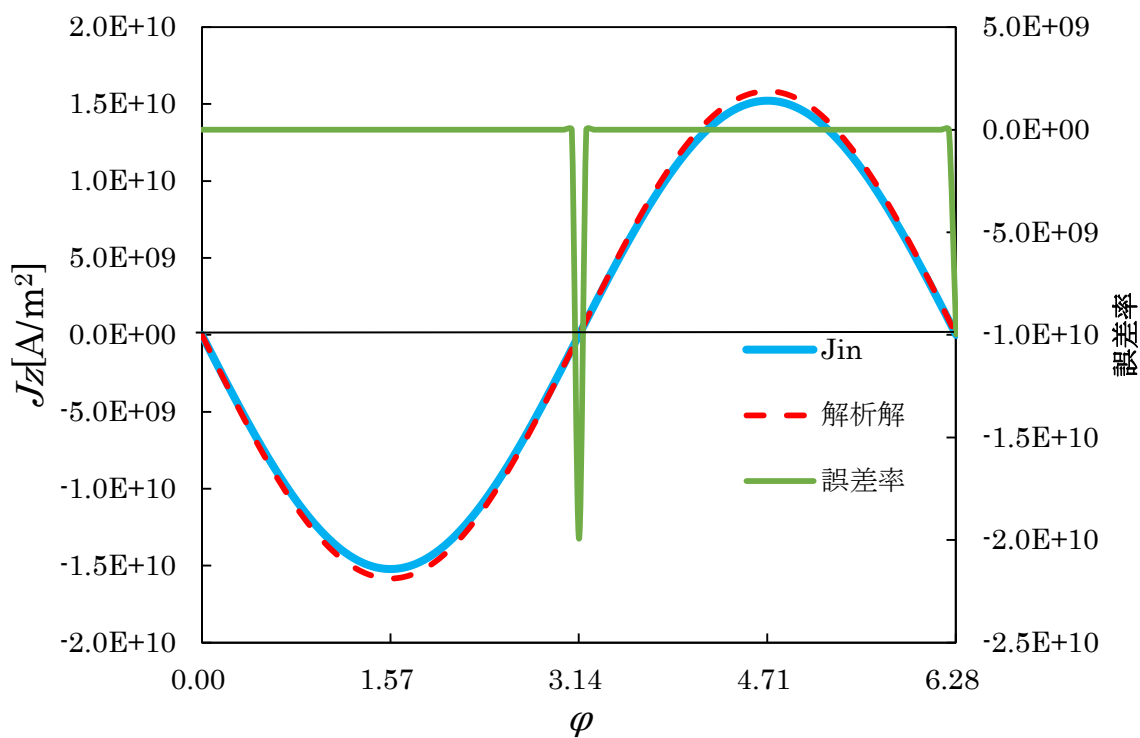


図 5.14 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の J_z の φ 変化 ($\rho = 0.010$)

ここまで見ると解析解と計算解がよく一致していることがわかる。このことより境界条件の式が正しく表現されているといえる。さらに逐次代入法による解法も適切なことがわかる。以下に磁束線の様子を示す。

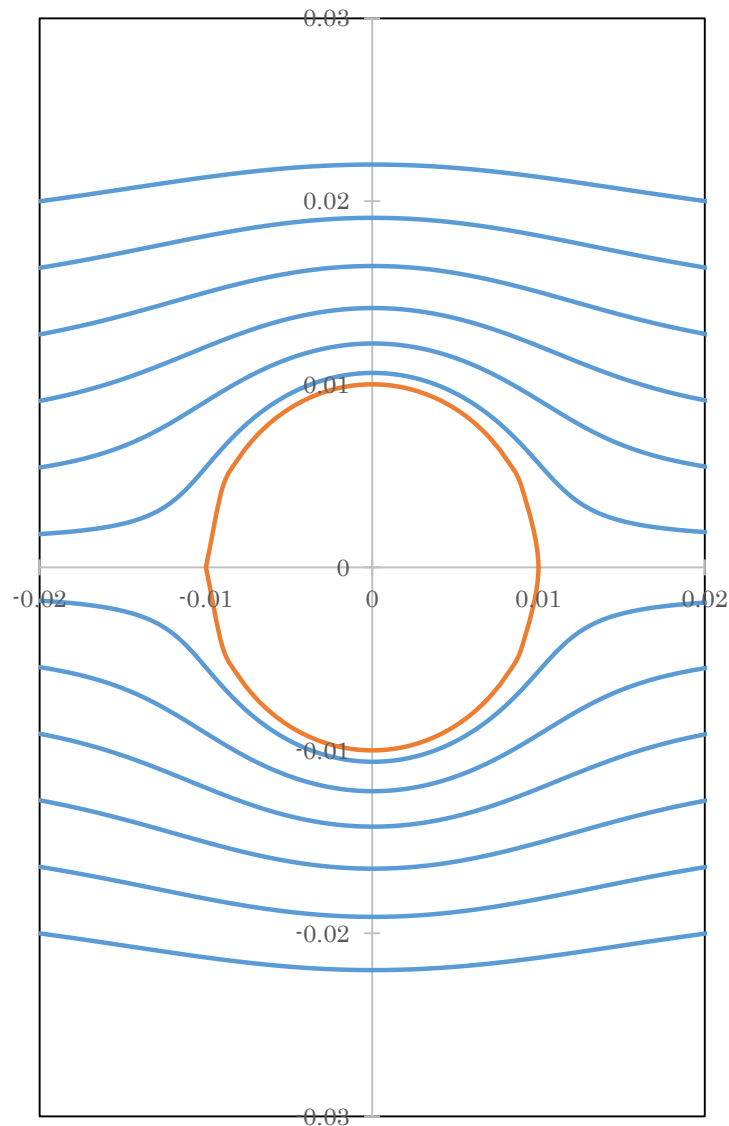


図 5.15 無限円柱型超伝導体に一様な外部磁場を加えた場合の磁束線の様子

図 5.15 を見ると磁束線が超伝導体を避けており、マイスナー効果を示していると考えられる。

この計算時の逐次代入法の収束の様子を次に示す。この図 5.16 は超伝導体表面の \mathbf{B}_{in} の総和について式(2.4.4)の左辺を計算したものを誤差率として示しており、これが 0 になることが収束を示す。図 5.16 を見ると反復回数とともに誤差率が 0 に近づいていることがわかり、逐次代入法により境界条件が解かれていることがわかる。

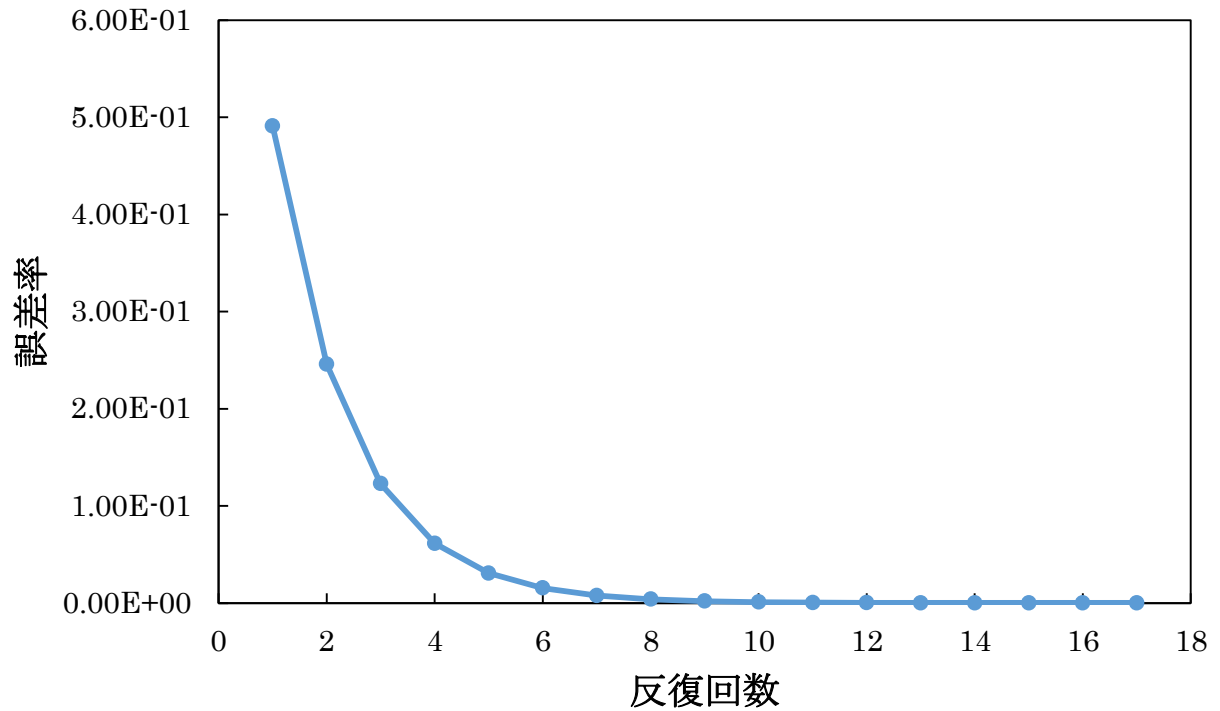


図 5.16 境界条件を逐次代入法により解く際の収束の様子

5.5 無限円柱型超伝導体上の磁石の浮上位置

無限円柱状超伝導体の上に磁石を浮上させた場合を考え、そのときの磁石の浮上位置を計算する。ここで超伝導体が無限に長いものを仮定しているため、磁石も無限に長いと仮定しなければ計算ができない。そこで図 5.17 に示すような無限円柱状超伝導体の上に無限に長い磁石を浮上させたモデルで浮上位置を計算した。この計算は付録に示したプログラムにて行った。

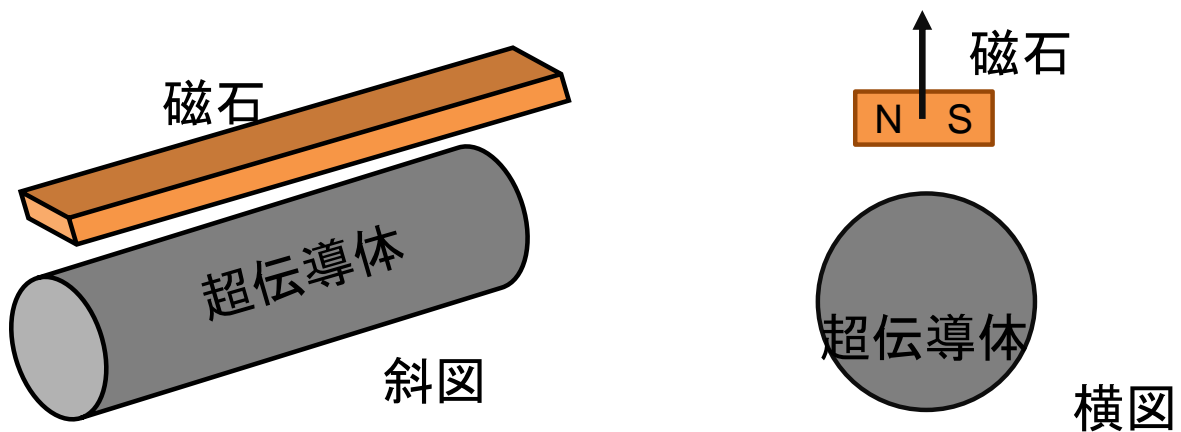


図 5.17 計算モデル

5.5.1 浮上位置

無限円柱状超伝導体の上に無限に長い磁石を浮上させた時の浮上位置を計算した。この計算にはロンドン方程式、境界条件、つり合いの式を用いた。無限円柱状超伝導体の半径 0.01[m] 磁場侵入長 0.0001[m] とし、磁荷の大きさ $50[A \cdot m]$ 質量 $0.2[kg/m]$ の磁石を浮上させた場合について計算を行った。磁石による磁場は磁気双極子によって表現した。

数値計算の結果磁石の浮上位置は 0.0238 はず電磁場解析の結果を図 5.18～図 5.24 に示す。図 5.18 は $\varphi = 0$ での ρ 方向の磁束密度 B_ρ の結果を示す。横軸に ρ を取り ρ 方向の磁束密度 B_ρ の ρ 変化を示している。図 5.19 は $\rho = 0.01$ での ρ 方向の磁束密度 B_ρ の結果を示す。横軸に φ を取り ρ 方向の磁束密度 B_ρ の φ 変化を示している。図 5.20 は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ での φ 方向の磁束密度 B_φ の結果を示す。横軸に ρ を取り φ 方向の磁束密度 B_φ の ρ 変化を示している。図 5.21 は $\rho = 0.01$ での φ 方向の磁束密度 B_φ の結果を示す。横軸に φ を取り φ 方向の磁束密度 B_φ の φ 変化を示している。図 5.22 は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ での z 方向の電流密度 J_z の結果を示す。横軸に ρ を取り z 方向の電流密度 J_z の ρ 変化を示している。図 5.23 は $\rho = 0.01$ での z 方向の電流密度 J_z の結果を示す。横軸に φ を取り z 方向の電流密度 J_z の φ 変化を示している。

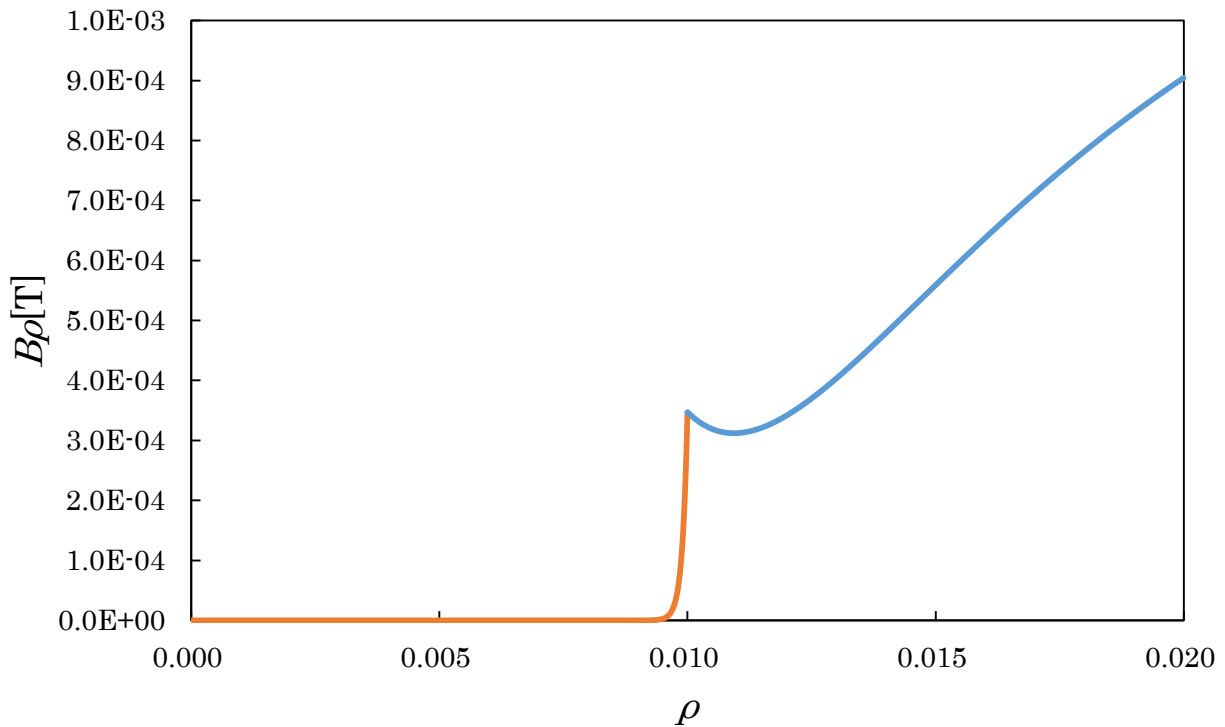


図 5.18 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の B_ρ の ρ 変化 ($\varphi = 0$)

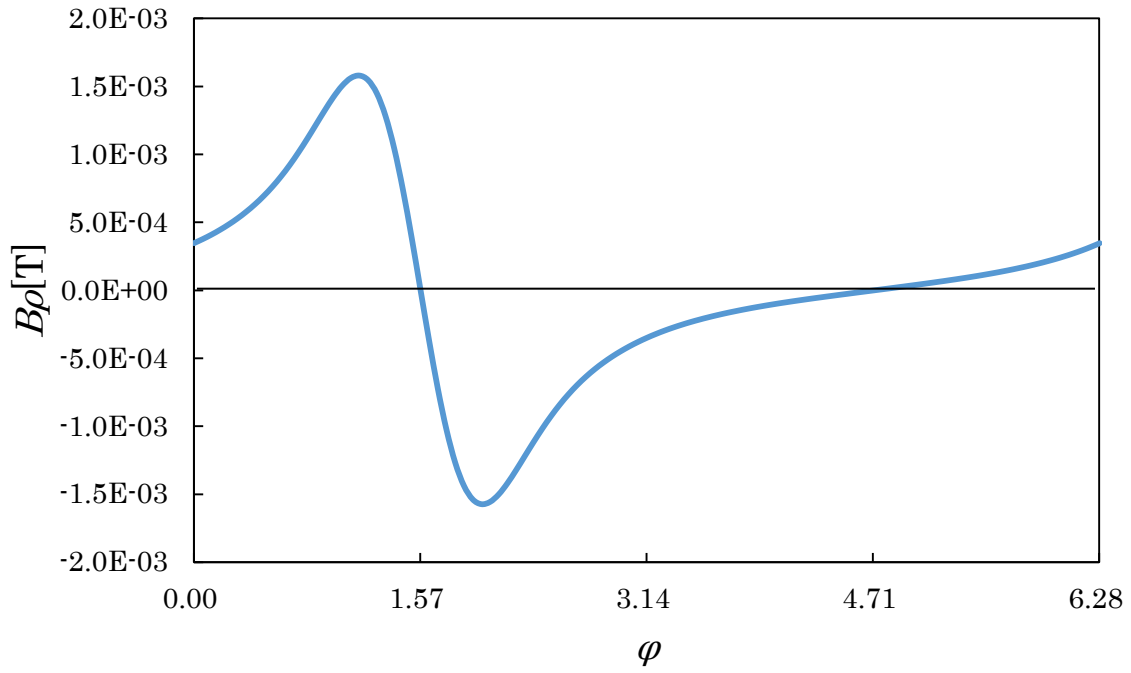


図 5.19 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の $B\rho$ の φ 変化($\rho = 0.010$)

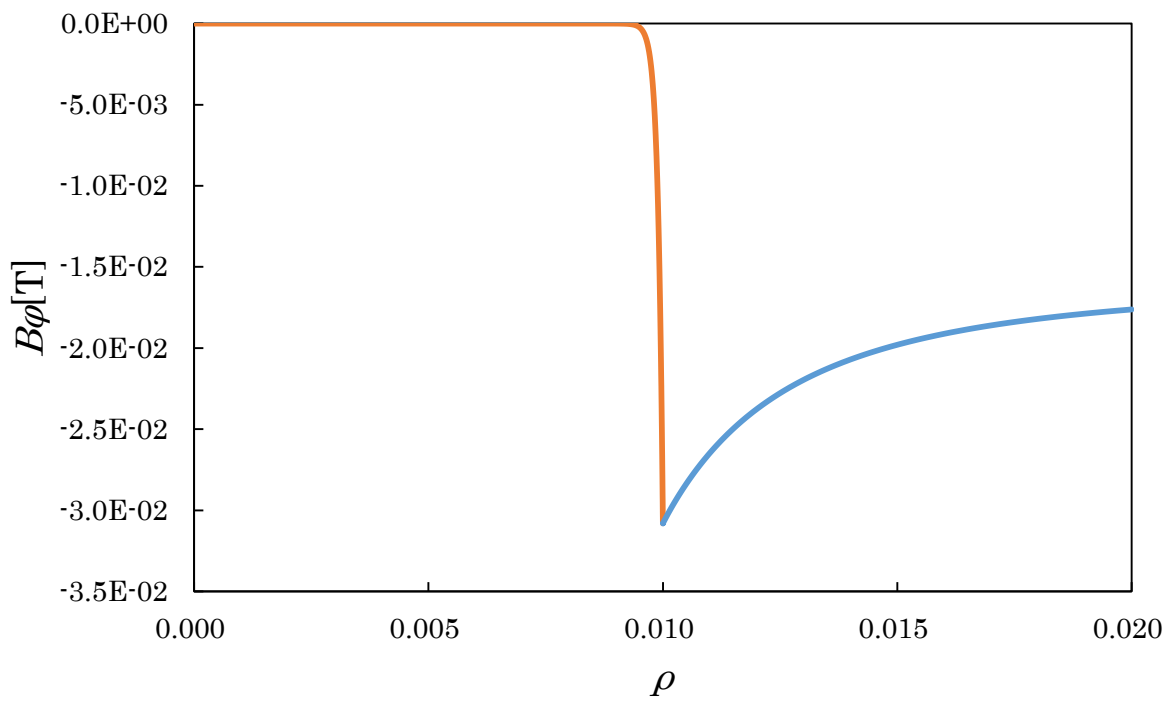


図 5.20 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の $B\varphi$ の ρ 変化($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

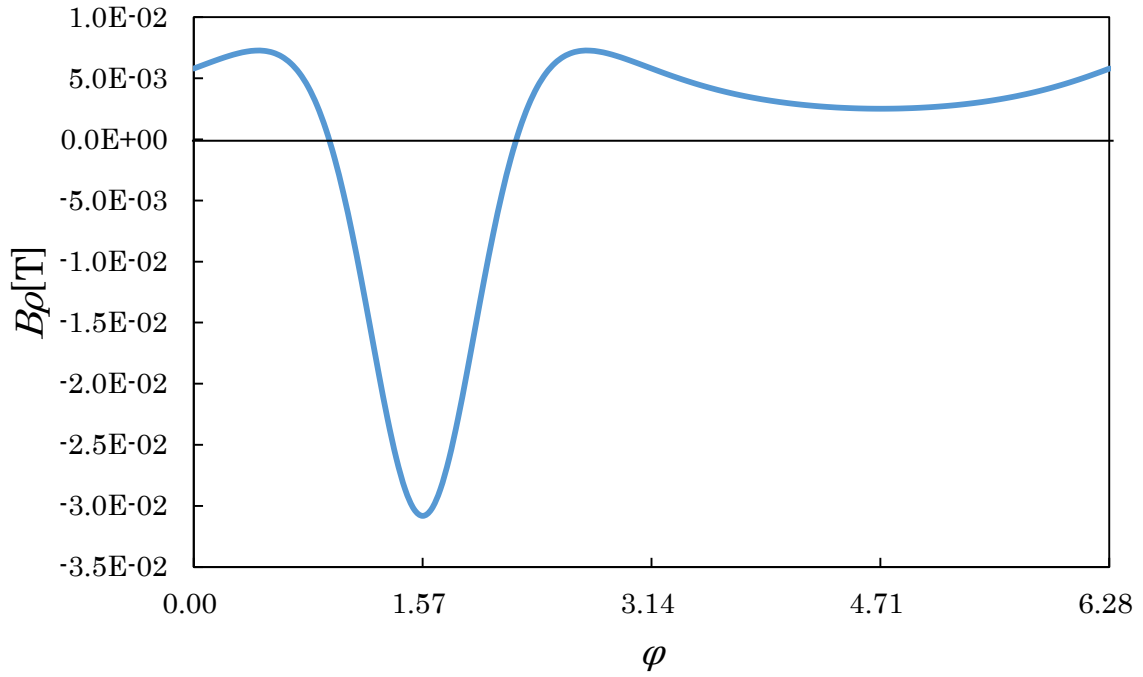


図 5.21 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の $B\varphi$ の φ 変化($\rho = 0.010$)

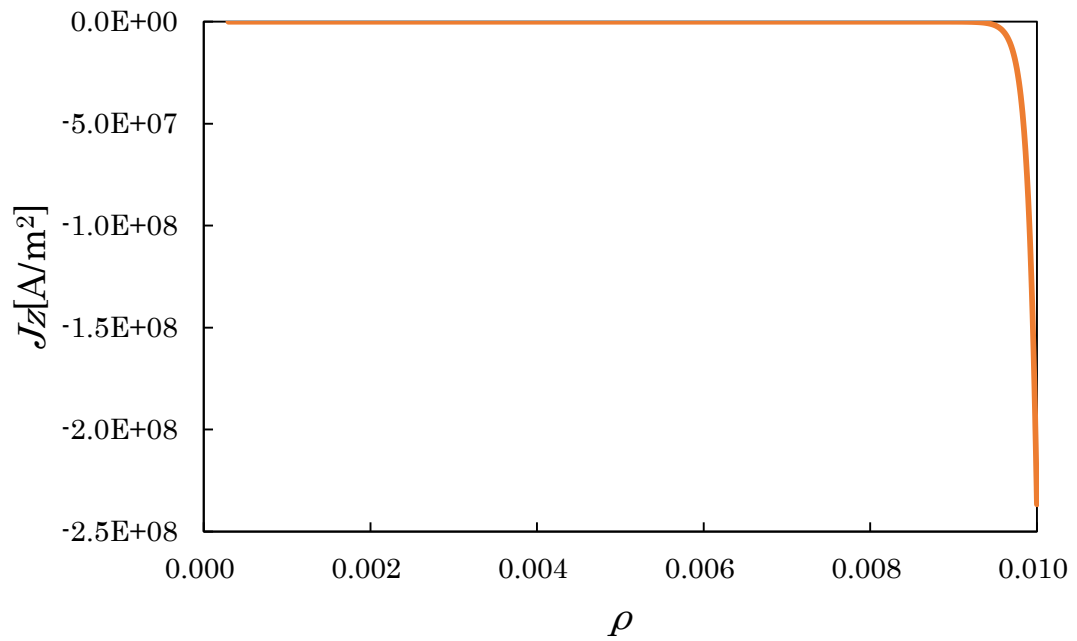


図 5.22 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の J_z の ρ 変化($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

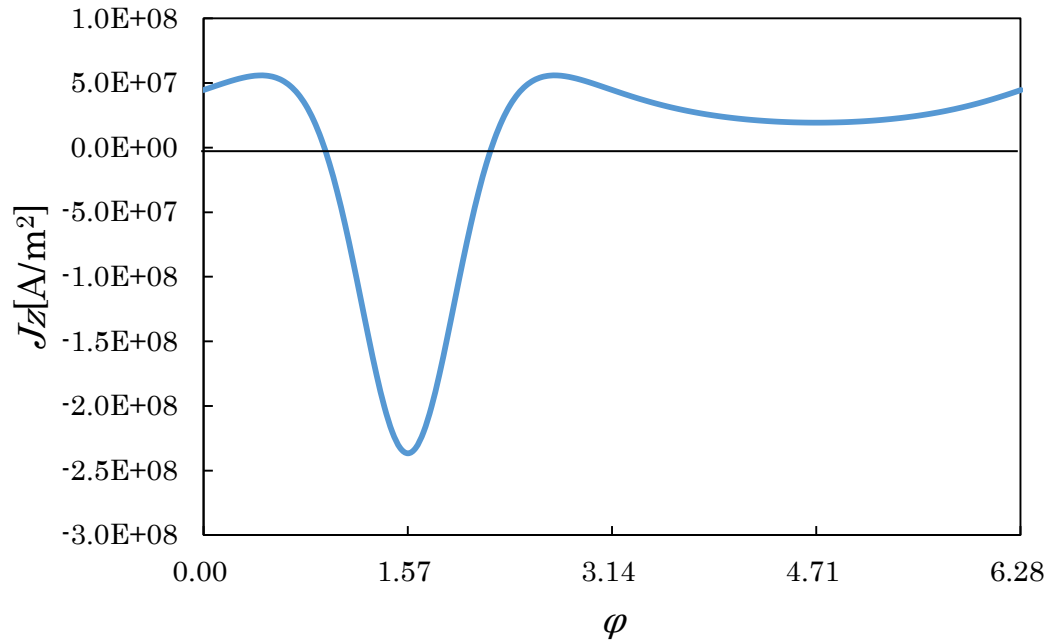


図 5.23 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の J_z の φ 変化($\rho = 0.010$)

図 5.18、図 5.20、図 5.22 をみると超伝導体内部では磁束密度電流密度が 0 に向かって減衰していることがわかる。これは超伝導体内部の磁束密度が 0 になるマイスナー効果を示している。

図 5.19、図 5.21、図 5.23 を見ると磁束密度や電流密度が磁石に近い $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 付近で大きな絶対値を示すことがわかる。

また、図 5.24 には超伝導体周辺の磁束線の様子の計算結果を示す。

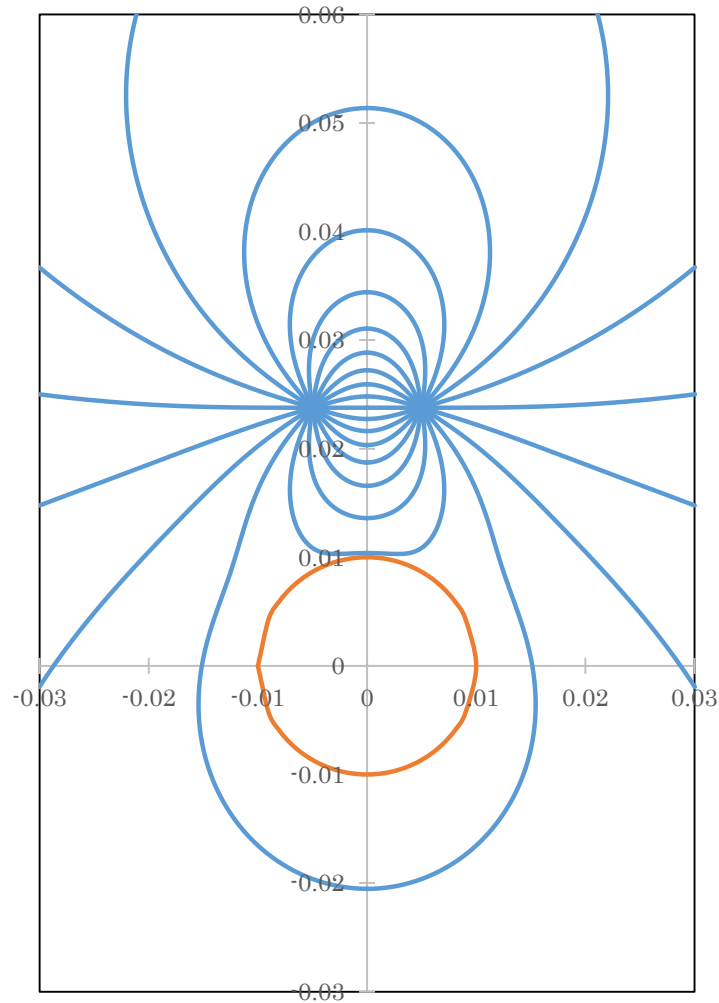


図 5.24 無限円柱型超伝導体に磁石を浮上させた場合の磁束線の様子

数値計算の結果磁石の浮上位置は $0.0238[\text{m}]$ であった。この結果は図 5.24 に示すように超伝導体の中心を原点とした時の値を示す。4 章で測定した磁石の浮上位置は $0.006[\text{m}]$ であった。この測定は計算を行ったモデルと条件が異なっているため単純に比較することはできないが、計算結果は測定結果とオーダーは一致しているといえるだろう。また、図 5.24 の磁束線の様子から超伝導体から磁束線が排除されていて、マイスナー効果を示しているといえる。

また、つり合いの式をニュートン法により解く際の磁石の位置の収束の様子を図 5.25 に示す。

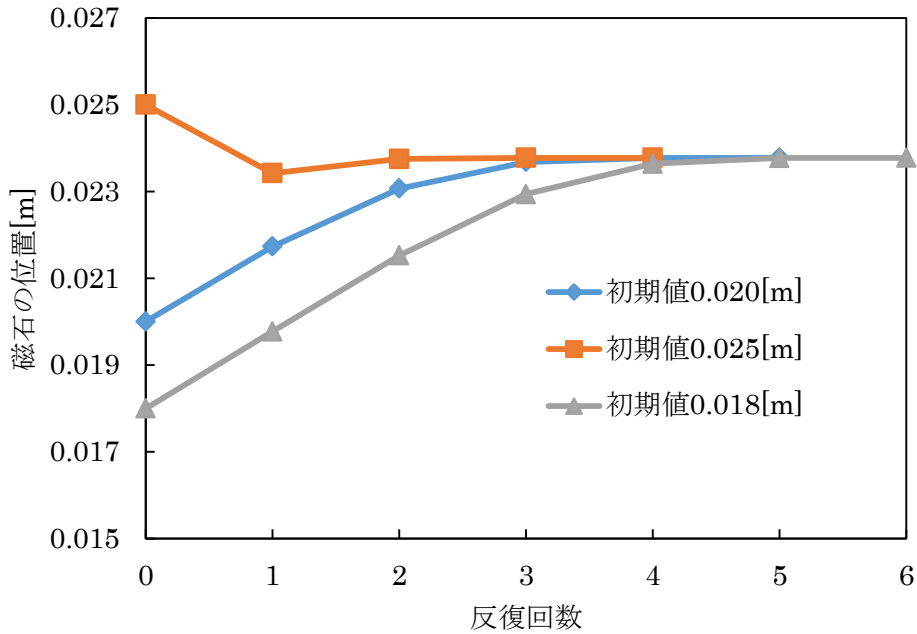


図 5.25 つり合いの式をニュートン法により解く際の収束の様子

図 5.25 を見ると反復回数とともに磁石の位置が 0.0238 に収束していることがわかる。また異なる初期値を与えても同じ位置に収束することもわかる。

5.5.2 質量と浮上位置の関係

磁石の質量を変えて浮上位置を計算することで磁石の質量と浮上位置の関係を調べた。磁石の質量が大きくなるほど浮上位置が低くなることが予想される。この結果を図 5.26 に示す。

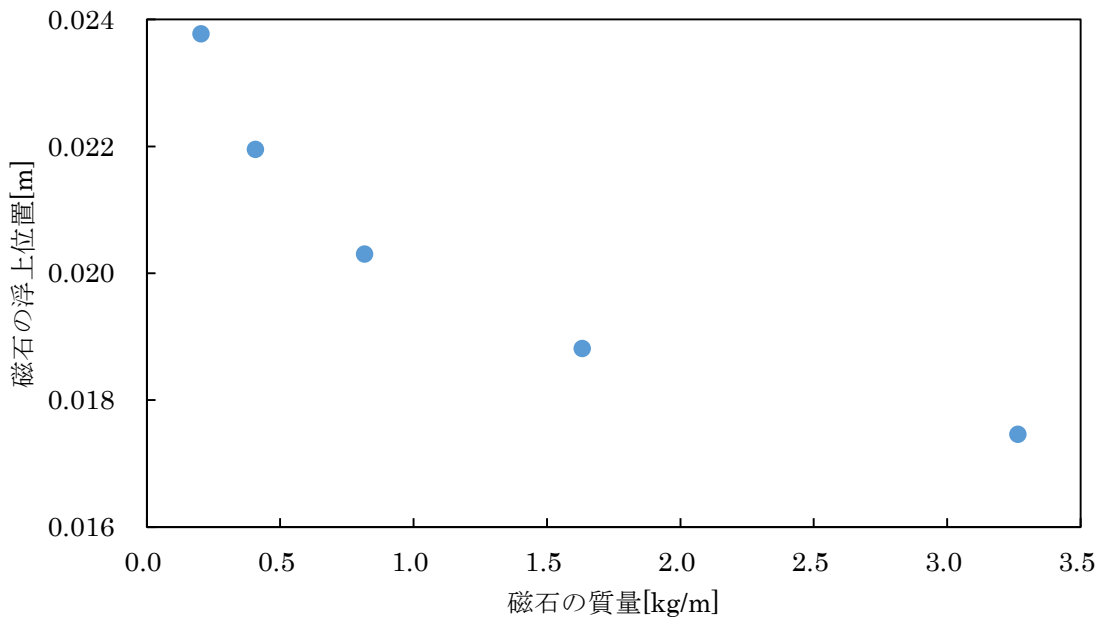


図 5.26 磁石の質量と浮上位置の関係

図 5.26 を見ると磁石の質量が大きくなるほど浮上位置が低くなっていることがわかる。この結果は予想されていた結果と一致したため、つり合いの式によって正しい結果が得られると考えられる。

第六章 結論

本研究は超伝導体の磁気浮上のメカニズムを解析することを目的とした。これはロンドン方程式、境界条件、つり合いの式の三式を解くことで磁石の浮上位置が計算できると結論づけた。この三式の中でロンドン方程式は超伝導体のマイスナー効果を示す式として知られているが、境界条件とつり合いの式は文献などに明確な記述がないため自身で磁気浮上のメカニズムについて検討し考案した式である。この式は積分の中に解が含まれるような積分方程式の形をしており解析的に解くことは困難であった。そこで逐次代入法による数値計算でこの式を解く方法を考案した。数値計算に当たっては計算方法の正当性の評価のために無限円柱状超伝導体の上に浮上する磁石の位置を計算した。その際、境界条件の中に含まれる積分が異常積分のため正確な計算ができなかったが、二重指数型数値積分法を導入することでこの問題を解決した。

以上の方法で数値計算を行い、無限円柱状超伝導体の上に浮上する磁石の浮上位置を求めることができた。また、超伝導体の周りの磁場を解析し、図示することができた。具体的には無限円柱状超伝導体の半径 $0.01[\text{m}]$ 磁場侵入長 $0.0001[\text{m}]$ とし、磁石の磁荷の大きさ $50[\text{A} \cdot \text{m}]$ 質量 $0.2[\text{kg}/\text{m}]$ の条件で、浮上位置が $0.0238[\text{m}]$ と求まった。これは、有限の超伝導体の場合の浮上位置 $0.006[\text{m}]$ とほぼ一致しており、本研究で考案した計算方法の正当性が確認された。

今後この方法を様々な形状の超伝導体の計算に発展させれば、超伝導体の形状と浮上位置の関係の調査が可能になると考えられる。そのためにはロンドン方程式、境界条件、つり合いの式を三次元にて計算できるプログラムを作成する必要がある。

謝辞

本研究を進めるにあたって指導していただいた国立東京工業高等専門学校物質工学科 土屋賢一 教授に感謝いたします。また、本研究に対し貴重なご意見をくださった国立東京工業高等専門学校物質工学科 阿久沢昇 教授に感謝を述べさせていただきます。最後に、本研究にご協力していただいた国立東京工業高等専門学校物質工学科 土屋研究室の皆様感謝いたします。

付録

プログラムとその解説

ここでは本研究にて無限円柱状超伝導体の上に浮上する磁石の位置を計算する際に用いたプログラムを示し、その内容について解説する。以下に示すプログラムは C++ によって書かれている。

1. 変数宣言

まず、このプログラムで用いる変数を宣言する。以下にプログラムのソースを示す。

```
void main(void){
    double r[1301],  $\theta$  [15002],  $\theta$  2[15002];//座標格子に用いる。 $\theta$  2 はビオ・サバル積分時に用い
る
    double myu0 = 1.2566370624e-6, pi = acos(-1.0);//定数
    int f,fo,i, j,l,i2, j2;//f は境界条件の収束用のループ変数。fo は浮上位置を求めるループの変数。
i は r 方向の格子番号。j は  $\theta$  方向の格子番号。l はビオ・サバル積分時に値のない格子点の値を求める
ときに、両端の点を求めるときに用いる番号。i2 はビオ・サバル積分時に用いる r 方向の格子番号。
j2 はビオ・サバル積分時に用いる  $\theta$  方向の格子番号。
    double gosa=1,gosa2;//境界条件収束の収束判定に使う。

    double Fx=0,Fy=0,Fz=0,Fax=0,Fay=0,Faz=0;//ローレンツ力や力を入れる
    int pm=1;
```

ここで宣言した変数の解説を以下に示す。

r:円筒座標の中心からの距離を示す配列

θ :円筒座標の角度を示す配列

θ 2:ビオ・サバル積分計算時に二重指数型変数変換によって変換された角度座標を格納する配列

myu0:真空の透磁率を格納する変数

pi:円周率を格納する変数

f:境界条件を解くための逐次代入の反復回数

fo:つり合いの式を解くためのニュートン法の反復回数

i:r の格子番号

j: θ の格子番号

l:関数端点で用いる θ の格子番号

i2:ビオ・サバル積分時に使う r の格子番号

j2:ビオ・サバル積分時に使う θ の格子番号

gosa:逐次代入法の収束判定用の変数

gosa2: 逐次代入法の収束判定用の変数

Fx:超伝導体にかかるローレンツ力の x 成分
 Fy:超伝導体にかかるローレンツ力の y 成分
 Fz:超伝導体にかかるローレンツ力の z 成分
 Fax:磁石にかかる力の x 成分
 Fay:磁石にかかる力の y 成分
 Faz:磁石にかかる力の z 成分
 Pm:ニュートン法の偶数回と奇数回の判別用

2. パラメータの入力

ユーザーが設定するパラメータを格納する変数を宣言する。以下にプログラムのソースを示す。

```

//////// 条件 ////////////////////////////////////////

////超伝導のパラメータ
double  rmax  =1.0/100,      //超伝導体の半径
        rmax2 =2.0/100;     //全計算範囲の半径
double  ra    =0.01/100; //侵入長ラムダ

////格子数のパラメータ
int     imax  =100,         //超伝導内の r 方向の格子数
        imax2 =200,         //全計算範囲の r 方向の格子数
        jmax  =104,         //超伝導内の θ 方向の格子数(何かの倍数という制限がある場合がある)
        jmaxin=200;        //積分を行うときの超伝導内の θ 方向の格子数

////反復の上限
int     fmax  =20,          //境界条件収束の上限回数
        fomax =25;          //浮上位置の上限回数

////磁石のパラメータ
double  m1     =50.0, //磁荷[Am]
        xm1    =-0.5/100, //x 座標
        ym1    =2.5/100, //y 座標
        m2     =-50.0, //磁荷[Wb]
        xm2    =0.5/100, //x 座標
        ym2    =2.5/100; //y 座標
double  Mg     =2.0; //重力
  
```

```

////収束判定用
double e =1.0e-10, //ガウスザイデルの収束判定
e2 =1.0e-5, //反復の収束判定
e3 =1.0e-5; //位置の収束
double bai =1.0e-6/100; //位置の変化の程度の初期値
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

```

ここで宣言した変数の解説を以下に示す。

rmax:超伝導体の半径[m]
rmax2:電磁場の計算範囲の半径(出力範囲)[m]
ra:磁場侵入長[m]
imax:超伝導体内部の r 方向の格子数
imax2:電磁場の計算範囲の r 方向の格子数
jmax: θ 方向の格子数
jmaxin:ビオ・サバルの法則の計算時の θ 方向の格子数
fmax:逐次代入法の反復上限
fomax:ニュートン法の反復上限
m1:磁石の磁荷 1[Am]
xm1:磁荷 1 の x 座標
ym1:磁荷 1 の初期 y 座標
m2:磁石の磁荷 2[Am]
xm2:磁荷 2 の x 座標
ym2:磁荷 2 の初期 y 座標
Mg:磁石にかかる重力[N]
e:ガウス・ザイデルの反復法の収束判定
e2:逐次代入法の収束判定
e3:ニュートン法の収束判定
bai:ニュートン法で微分を求めるときの変化量

3. 電磁場を示す変数の宣言

電磁場を示す変数を宣言する。以下にプログラムのソースを示す。

```

double *Bsupr, *Bsup $\theta$ , *Bsupz;
Bsupr=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax2,jmax,imax2,jmax));
Bsup $\theta$ =(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax2,jmax,imax2,jmax));
Bsupz=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax2,jmax,imax2,jmax));

double *Binr, *Bin $\theta$ , *Binz;

```

```

Binr=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));
Binθ=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));
Binz=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));

double *Binrg, *Binθg, *Binzg;
Binrg=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));
Binθg=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));
Binzg=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));

double *Jinr, *Jinθ, *Jinz;
Jinr=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));
Jinθ=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));
Jinz=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmax,imax,jmax));

double *Jinr2, *Jinθ2, *Jinz2;
Jinr2=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmaxin,imax,jmaxin));
Jinθ2=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmaxin,imax,jmaxin));
Jinz2=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax,jmaxin,imax,jmaxin));

double *Bexr, *Bexθ, *Bexz;
Bexr=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax2,jmax,imax2,jmax));
Bexθ=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax2,jmax,imax2,jmax));
Bexz=(double *)malloc(sizeof(double)*hash2(imax2,jmax,imax2,jmax));

```

ここで宣言した変数の説明を以下に示す。

Bsupr:超伝導電流密度に起因する磁束密度の r 成分を格納する配列

Bsupθ:超伝導電流密度に起因する磁束密度の θ 成分を格納する配列

Bsupz:超伝導電流密度に起因する磁束密度の z 成分を格納する配列

Binr:超伝導体内部の磁束密度の r 成分を格納する配列

Binθ:超伝導体内部の磁束密度の θ 成分を格納する配列

Binz:超伝導体内部の磁束密度の z 成分を格納する配列

Binrg:逐次代入法の収束判定時に用いる

Binθg:逐次代入法の収束判定時に用いる

Binzg:逐次代入法の収束判定時に用いる

Jinr:超伝導電流密度の r 成分を格納する配列

Jinθ:超伝導電流密度の θ 成分を格納する配列

Jinz:超伝導電流密度の z 成分を格納する配列

Jinr2:ビオ・サバルの法則の計算時に用いる伝導電流密度の r 成分を格納する配列

Jin θ 2: ビオ・サバルの法則の計算時に用いる伝導電流密度の θ 成分を格納する配列

Jinz2: ビオ・サバルの法則の計算時に用いる伝導電流密度の z 成分を格納する配列

Bexr: 外部磁束密度の r 成分を格納する配列

Bex θ : 外部磁束密度の θ 成分を格納する配列

Bexz 外部磁束密度の z 成分を格納する配列

4. 格子座標定義

本研究ではロンドン方程式を解くために差分法を用いるが、差分法を用いるためには差分格子が必要となる。ここで差分格子の座標を定義する。以下にプログラムのソースを示す。

```
//格子座標定義
kousi2R(r, $\theta$ ,rmax,rmax2,imax,imax2,jmax);
```

上記ソース中にて用いられている関数 `kousi2R` は格子座標を定義する関数である。配列 `r, θ` に値を入れて返す関数である。以下に関数 `kousi2R` のソースを示す。

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
void kousi2R(double r[], double  $\theta$ [], double rmax,double rmax2,int imax, int imax2,int jmax){
    int i, j;
    double pi=acos(-1.0);

    double o = 0,p=0;

    r[0] = 0;
    r[imax] = rmax;
    r[imax2]=rmax2;
     $\theta$ [0] = 0;
     $\theta$ [jmax] = 2*pi;

    for (i = imax - 1; i >= 0; i--){
        o = o +pow(double(imax-i),2);
    }
    for (i = imax+1; i <= imax2; i++){
        p = p +pow(double(i-imax),2);// i/(imax2+1)//1 - cos((pi*(i) / (imax2 + 1)));//
    }

    for (i = imax - 1; i >= 1; i--){
        r[i] = r[i + 1] - (rmax) / o *pow(double(imax-i),2);
    }
}
```



```

    for (i =imax+ 1; i <= imax2-1; i++){
        r[i] = r[i - 1] + (rmax2-rmax) / p*pow(double(i-imax),2);/* i/(imax2+1);/* (1 -
cos((pi*(i) / (imax2 + 1)))));//
    }

    for (j = 1; j <= jmax-1; j++){
         $\theta[j] = \theta[j - 1] + (2.0*pi) / (jmax);$ 
    }
}

```

この関数は r の格子座標がに関して超伝導体の表面付近で格子幅が小さくなる不等間隔格子となるように書かれている。

5. ニュートン法のループ開始

つり合いの式を解くためのニュートン法のループに入る。以下にプログラムのソースを示す。

```

//浮上位置ループ
fo=1;
Fax=Mg;Fay=Mg;Faz=Mg;
while(fabs(Fay)/Mg>e3 && fo<=fomax){

```

while ループを抜ける条件として収束判定 $\text{fabs}(Fay)/Mg > e3$ を用いている。この収束条件は磁石にかかる力が磁石にかかる重力に対して $e3$ より小さくなったとき収束としている。

6. 初期値の代入

電磁場を示す変数に初期値を代入する。以下にプログラムのソースを示す。

```

//初期化
    for(j=0;j<=jmax;j++){
        for(i=0;i<=imax;i++){
            Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)]=0;
            Jin $\theta$ [hash2(i,j,imax,jmax)]=0;
            Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)]=0;
        }
    }
    for(j=0;j<=jmaxin;j++){
        for(i=0;i<=imax;i++){

```

```

        Jinr2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=0;
        Jin02[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=0;
        Jinz2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=0;
    }
}
for (j = 0; j <= jmax; j++){
    for(i=0;i<=imax2;i++){
        Bexr[hash2(i,j,imax2,jmax)]
=jisyakur(r[i],θ[j],m1,xm1,ym1,m2,xm2,ym2);
        Bexθ[hash2(i,j,imax2,jmax)] =
jisyakuθ(r[i],θ[j],m1,xm1,ym1,m2,xm2,ym2);
        Bexz[hash2(i,j,imax2,jmax)] = 0;
    }
}
for (j = 0; j <= jmax; j++){
    for(i=0;i<=imax2;i++){
        Bsupr[hash2(i,j,imax2,jmax)] = 0;
        Bsupθ[hash2(i,j,imax2,jmax)] = 0;
        Bsupz[hash2(i,j,imax2,jmax)] = 0;
    }
}
for (j = 0; j <= jmax; j++){
    i = imax;
    Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] =
Bexr[hash2(i,j,imax2,jmax)]+Bsupr[hash2(i,j,imax2,jmax)] ;
    Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] =
Bexθ[hash2(i,j,imax2,jmax)]+Bsupθ[hash2(i,j,imax2,jmax)];
    Binz[hash2(i,j,imax,jmax)] =
Bexz[hash2(i,j,imax2,jmax)]+Bsupz[hash2(i,j,imax2,jmax)];
}
}

```

上記ソース中で外部磁束密度 **Bex** には関数 **jisyaku** によって磁石による磁束密度を代入している。さらに、超伝導体表面の内部磁束密度 **Bin** には境界条件より外部磁束密度 **Bex** と超伝導電流に起因する磁束密度 **Bsup** の和を代入している。

関数 **jisyaku** には **r** 方向の磁束密度を返す **jisyakur**、**θ** 方向の磁束密度を返す **jisyaku θ**、**z** 方向の磁束密度を返す **jisyakuz** がある。以下に関数 **jisyaku** のソースを示す

```

#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

```

```

#include"kento.h"

double jisyakur(double r,double θ,double m1,double xm1,double ym1,double m2,double xm2,double
ym2){
    double pi = acos(-1.0),myu0 = 1.2566370624e-6;
    double
rm1=sqrt(xm1*xm1+ym1*ym1),θm1=Fθ(xm1,ym1),rm2=sqrt(xm2*xm2+ym2*ym2),θm2=Fθ(xm2,y
m2);
    double
Br=myu0*m1/4/pi*(r-rm1*cos(θ-θm1))/pow(sqrt(r*r+rm1*rm1-2*r*rm1*cos(θ-θm1)),3)+myu0*m2/4/
pi*(r-rm2*cos(θ-θm2))/pow(sqrt(r*r+rm2*rm2-2*r*rm2*cos(θ-θm2)),3);
    return Br;
}

double jisyonuθ(double r,double θ,double m1,double xm1,double ym1,double m2,double xm2,double
ym2){
    double pi = acos(-1.0),myu0 = 1.2566370624e-6;
    double
rm1=sqrt(xm1*xm1+ym1*ym1),θm1=Fθ(xm1,ym1),rm2=sqrt(xm2*xm2+ym2*ym2),θm2=Fθ(xm2,y
m2);
    double
Bθ=myu0*m1/4/pi*(rm1*sin(θ-θm1))/pow(sqrt(r*r+rm1*rm1-2*r*rm1*cos(θ-θm1)),3)+myu0*m2/4/pi
*(rm2*sin(θ-θm2))/pow(sqrt(r*r+rm2*rm2-2*r*rm2*cos(θ-θm2)),3);
    return Bθ;
}

```

この関数により磁石の磁束密度は磁気双極子によって近似計算される。

7. 逐次代入法開始

境界条件を解くための逐次代入法のループに入る。以下にプログラムのソースを示す。

```

//境界条件収束計算へ
printf("                ");
gosa=1;f=0;
while (gosa>=e2 && f<fmax){
    gosa=0;gosa2=0;

```

While ループを抜ける条件として収束条件 $gosa \geq e2$ を用いている。gosa は超伝導体表面の Bin の値について式(2.4.4)を計算したものである。

8. ロンドン方程式を解く

差分法とガウス・ザイデルの反復法によりロンドン方程式を解く。以下にプログラムのソースを示す。

```
//ガウスの反復によりロンドン方程式を解く
sabun2R(Binr, r,  $\theta$ , ra, imax, jmax, e);
sabun2R(Bin $\theta$ , r,  $\theta$ , ra, imax, jmax, e);
sabun2R(Binz, r,  $\theta$ , ra, imax, jmax, e);
```

上記ソース中で用いられている関数 `sabun2R` は 2 次元ロンドン方程式を解く関数である。以下に関数 `sabun2R` のソースを示す。

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include"kento.h"
void sabun2R(double *Binr, double r[], double  $\theta$  [], double ra, int imax, int jmax, double e){//ロンドンの差分方程式をガウスザイデルによって解く
    double gosa = 1.0, gosa2, gosa3, pi = acos(-1.0);
    double a, b;
    int i, j;
    double omega = 2 / (1 + sqrt(1 - (cos(pi / imax) + cos(pi / jmax)) * (cos(pi / imax) + cos(pi / jmax))) / 2);
    for (i = 0; i <= imax - 1; i++){
        for (j = 0; j <= jmax; j++){
            Binr[hash2(i, j, imax, jmax)] = Binr[hash2(imax, j, imax, jmax)];
        }
    }
    while (gosa > e){
        gosa = 0;
        gosa2 = 0;
        for (i = imax - 1; i >= 1; i--){
            j = 0;
            gosa3 = Binr[hash2(i, j, imax, jmax)];
            a = (r[i] - r[i - 1]) * (r[i + 1] - r[i - 1]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j] - ( $\theta$ [jmax - 1] - 2 * pi)) * Binr[hash2(i + 1, j, imax, jmax)]
                + (r[i + 1] - r[i]) * (r[i + 1] - r[i - 1]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j] - ( $\theta$ [jmax - 1] - 2 * pi)) * Binr[hash2(i - 1, j, imax, jmax)]
                + 1 / r[i] * (r[i + 1] - r[i]) * (r[i + 1] - r[i]) * (r[i] - r[i - 1]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j] - ( $\theta$ [jmax - 1] - 2 * pi)) * Binr[hash2(i + 1, j, imax, jmax)]
                - 1 / r[i] * (r[i + 1] - r[i]) * (r[i + 1] - r[i]) * (r[i] - r[i - 1]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j + 1] -  $\theta$ [j]) * ( $\theta$ [j] - ( $\theta$ [jmax - 1] - 2 * pi)) * Binr[hash2(i - 1, j, imax, jmax)]
                + 1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i]) * (r[i + 1] - r[i - 1]) * (r[i + 1] - r[i]) * (r[i] - r[i - 1] -
```

```

11)*(θ[j] - (θ[jmax-1]-2*pi))*Binr[hash2(i,j+1,imax,jmax)]
        +1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i -
11)*(θ[j + 1] - θ[j])*Binr[hash2(i,jmax-1,imax,jmax)];
        b=(r[i] - r[i - 1])*(r[i+1]-r[i-1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j] -
(θ[jmax-1]-2*pi))
        +(r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j] -
(θ[jmax-1]-2*pi))
        +1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i -
11)*(θ[j] - (θ[jmax-1]-2*pi))
        + 1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i
- 1])*(θ[j + 1] - θ[j])
        +(r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j + 1]
- θ[j])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j] - (θ[jmax-1]-2*pi)) / ra / ra;
        Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] = Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] +
omega*(a/b - Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);
        gosa=gosa+fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] - gosa3);
        gosa2=gosa2+fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);
        for (j = 1; j <= jmax - 1; j++){
                gosa3=Binr[hash2(i,j,imax,jmax)];
                a=(r[i] - r[i - 1])*(r[i+1]-r[i-1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] -
θ[j])*(θ[j] - θ[j-1])*Binr[hash2(i+1,j,imax,jmax)]
                +(r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] -
θ[j])*(θ[j] - θ[j-1])*Binr[hash2(i-1,j,imax,jmax)]
                +1 / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j +
1] - θ[j])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j] - θ[j-1])*Binr[hash2(i+1,j,imax,jmax)]
                -1 / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j +
1] - θ[j])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j] - θ[j-1])*Binr[hash2(i-1,j,imax,jmax)]
                +1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] -
r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j] - θ[j-1])*Binr[hash2(i,j+1,imax,jmax)]
                +1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] -
r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j + 1] - θ[j])*Binr[hash2(i,j-1,imax,jmax)];
                b=(r[i] - r[i - 1])*(r[i+1]-r[i-1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] -
θ[j])*(θ[j] - θ[j-1])
                +(r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] -
θ[j])*(θ[j] - θ[j-1])
                +1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] -
r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j] - θ[j-1])
                + 1 / r[i] / r[i] * (r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] -

```

```

r[i])*(r[i] - r[i - 1])*(θ[j + 1] - θ[j])
+(r[i + 1] - r[i])*(r[i+1]-r[i-1])*(r[i + 1] - r[i])*(r[i] - r[i -
1])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j + 1] - θ[j])*(θ[j] - θ[j-1]) / ra / ra;
Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] = Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]
+ omega*(a/b - Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);
gosa = gosa + fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] - gosa3);
gosa2 = gosa2 + fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);
}
j = jmax;
gosa3=Binr[hash2(i,j,imax,jmax)];
Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] = Binr[hash2(i,0,imax,jmax)];
gosa = gosa + fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] - gosa3);
gosa2 = gosa2+ fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);
}
i=0;
for (j = 0; j <= jmax; j++){
gosa3=Binr[hash2(i,j,imax,jmax)];
Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] = Binr[hash2(i+1,j,imax,jmax)];//中心点は微分
の境界条件
gosa = gosa + fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)] - gosa3);
gosa2 = gosa2 + fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);
}
gosa = gosa / gosa2;
}
}

```

この関数中には式(3.2.4)をガウス・ザイデルの反復法に適用できるように変形した式が用いられている。

9. 逐次代入法の収束判定のための計算

逐次代入法の収束判定のために用いる `gosa` を計算し、次の `gosa` の計算のために超伝導体表面の `Bin` を `Binrg` に入れておく。以下にプログラムのソースを示す。

```

//収束判定のための計算
for (i=imax;i<=imax;i++){
for(j=0;j<=jmax;j++){

gosa=gosa+fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]-Binrg[hash2(i,j,imax,jmax)]);

```

```

gosa2=gosa2+fabs(Binr[hash2(i,j,imax,jmax)]);

gosa=gosa+fabs(Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)]-Binθg[hash2(i,j,imax,jmax)]);
gosa2=gosa2+fabs(Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)]);

gosa=gosa+fabs(Binz[hash2(i,j,imax,jmax)]-Binzg[hash2(i,j,imax,jmax)]);
gosa2=gosa2+fabs(Binz[hash2(i,j,imax,jmax)]);
Binrg[hash2(i,j,imax,jmax)]=Binr[hash2(i,j,imax,jmax)];
Binθg[hash2(i,j,imax,jmax)]=Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)];
Binzg[hash2(i,j,imax,jmax)]=Binz[hash2(i,j,imax,jmax)];
    }
}
gosa=gosa/gosa2;

```

10. 電流密度の計算

ロンドン方程式を解いて得た Bin から超伝導電流密度を計算する。以下にプログラムのソースを示す。

```

//電流密度の算出
jcal2R(Jinr,Jinθ,Jinz,Binr,Binθ,Binz,r,θ,imax,jmax);

```

上記ソース中で用いられた電流密度を計算する関数 jcal2R を以下に示す。

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include"kento.h"
void jcal2R(double *Jinr,double *Jinθ ,double *Jinz,double *Binr,double *Binθ ,double *Binz,double
r[],double θ [], int imax,int jmax){//磁場から電流密度を求めます
    int i,j;
    double myu0= 1.2566370624e-6,pi = acos(-1.0);
    for (i = 1; i <= imax - 1; i++){
        j = 0;
        Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*(1 / r[i] * (Binz[hash2(i,j+1,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i,jmax-1,imax,jmax)]) / (θ[j+1] - (θ[jmax-1]-2.0*pi)));
        Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*(- (Binz[hash2(i+1,j,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i + 1] - r[i - 1]));
        Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( (Binθ[hash2(i+1,j,imax,jmax)] -
Binθ[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i + 1] - r[i - 1]) + 1 / r[i] * Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] - 1 / r[i] *
(Binr[hash2(i,1,imax,jmax)] - Binr[hash2(i,jmax-1,imax,jmax)]) / (θ[j+1] - (θ [jmax-1]-2.0*pi)));
        for (j = 1; j <= jmax - 1; j++){

```

```

        Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*(1 / r[i] *
(Binz[hash2(i,j+1,imax,jmax)] - Binz[hash2(i,j-1,imax,jmax)]) / (θ[j + 1] - θ[j - 1]));
        Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( - (Binz[hash2(i+1,j,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i + 1] - r[i - 1]));
        Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( (Binθ[hash2(i+1,j,imax,jmax)] -
Binθ[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i + 1] - r[i - 1]) + 1 / r[i] * Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] - 1 / r[i] *
(Binr[hash2(i,j+1,imax,jmax)] - Binr[hash2(i,j-1,imax,jmax)]) / (θ[j + 1] - θ[j - 1]));
    }
    j = jmax;
    Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)] = Jinr[hash2(i,0,imax,jmax)];
    Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)] = Jinθ[hash2(i,0,imax,jmax)];
    Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)] = Jinz[hash2(i,0,imax,jmax)];
}
i=imax;
j = 0;
    Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*(1 / r[i] * (Binz[hash2(i,j+1,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i,jmax-1,imax,jmax)]) / (θ[j+1] - (θ[jmax-1]-2.0*pi)));
    Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( - (Binz[hash2(i,j,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i] - r[i - 1]));
    Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( (Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] -
Binθ[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i] - r[i - 1]) + 1 / r[i] * Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] - 1 / r[i] *
(Binr[hash2(i,1,imax,jmax)] - Binr[hash2(i,jmax-1,imax,jmax)]) / (θ[j+1] - (θ[jmax-1]-2.0*pi)));
    for (j = 1; j <= jmax - 1; j++){
        Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*(1 / r[i] * (Binz[hash2(i,j+1,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i,j-1,imax,jmax)]) / (θ[j + 1] - θ[j - 1]));
        Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( - (Binz[hash2(i,j,imax,jmax)] -
Binz[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i] - r[i - 1]));
        Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)] = 1 / myu0*( (Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] -
Binθ[hash2(i-1,j,imax,jmax)]) / (r[i] - r[i - 1]) + 1 / r[i] * Binθ[hash2(i,j,imax,jmax)] - 1 / r[i] *
(Binr[hash2(i,j+1,imax,jmax)] - Binr[hash2(i,j-1,imax,jmax)]) / (θ[j + 1] - θ[j - 1]));
    }
    j = jmax;
    Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)] = Jinr[hash2(i,0,imax,jmax)];
    Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)] = Jinθ[hash2(i,0,imax,jmax)];
    Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)] = Jinz[hash2(i,0,imax,jmax)];
}
}

```


ここでは式(2.3.1.8)の計算を差分近似によって計算している。

11. ビオ・サバールの法則の計算と逐次代入法の終わり

境界条件の右辺を計算し、境界上の Bin の新しい値を求める。以下にプログラムのソースを示す。

```
//実際にビオサバール
for (j2 = 0; j2 <= jmax; j2++){
    //積分用の  $\theta$  格子
    inkousi( $\theta$ 2, $\theta$ [j2],jmaxin);
    //直線近似
    for(i=1;i<=imax-1;i++){
        for(j=0;j<=jmaxin-1;j++){
            if( $\theta$ 2[j]>2.0*pi){
                l=tanten( $\theta$ , $\theta$ 2[j]-2.0*pi);

                Jinr2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=tyokusen( $\theta$ 2[j]-2.0*pi,Jinr[hash2(i,l+1,imax,jmax)],Jinr[hash2(i,l,imax,jmax)], $\theta$ [l+1], $\theta$ [l]);

                Jin $\theta$ 2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=tyokusen( $\theta$ 2[j]-2.0*pi,Jin $\theta$ [hash2(i,l+1,imax,jmax)],Jin $\theta$ [hash2(i,l,imax,jmax)], $\theta$ [l+1], $\theta$ [l]);

                Jinz2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=tyokusen( $\theta$ 2[j]-2.0*pi,Jinz[hash2(i,l+1,imax,jmax)],Jinz[hash2(i,l,imax,jmax)], $\theta$ [l+1], $\theta$ [l]);

            }
            else{
                l=tanten( $\theta$ , $\theta$ 2[j]);

                Jinr2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=tyokusen( $\theta$ 2[j],Jinr[hash2(i,l+1,imax,jmax)],Jinr[hash2(i,l,imax,jmax)], $\theta$ [l+1], $\theta$ [l]);

                Jin $\theta$ 2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=tyokusen( $\theta$ 2[j],Jin $\theta$ [hash2(i,l+1,imax,jmax)],Jin $\theta$ [hash2(i,l,imax,jmax)], $\theta$ [l+1], $\theta$ [l]);

                Jinz2[hash2(i,j,imax,jmaxin)]=tyokusen( $\theta$ 2[j],Jinz[hash2(i,l+1,imax,jmax)],Jinz[hash2(i,l,imax,jmax)], $\theta$ [l+1], $\theta$ [l]);

            }
        }
    }
}
```

```

//積分
for(i2=imax;i2<=imax;i2++){
    Bsupr[hash2(i2,j2,imax2,jmax)]=0;
    Bsupθ[hash2(i2,j2,imax2,jmax)]=0;
    Bsupz[hash2(i2,j2,imax2,jmax)]=0;
    for (i = 1; i <= imax-2; i++){
        for (j = 1; j <= jmaxin-2; j++){
            Bsupr[hash2(i2,j2,imax2,jmax)] =
Bsupr[hash2(i2,j2,imax2,jmax)] +
(Fbior(Jinr2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],Jinθ2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],Jinz2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],r[i
2],r[i],θ[j2],θ2[j])*yakobi(r[i],rmax,0.0)*yakobi(θ2[j],pi,θ[j2]+pi)

            +Fbior(Jinr2[hash2(i+1,j+1,imax,jmaxin)],Jinθ2[hash2(i+1,j+1,imax,jmaxin)],Jinz2[hash2(i
+1,j+1,imax,jmaxin)],r[i2],r[i+1],θ[j2],θ2[j+1])*yakobi(r[i+1],rmax,0.0)*yakobi(θ2[j+1],pi,θ[j2]+pi))/2.
0* (rtot(r[i + 1],rmax,0.0) - rtot(r[i],rmax,0.0))*(rtot(θ2[j+1],pi,θ[j2]+pi) - rtot(θ2[j],pi,θ[j2]+pi));
            Bsupθ[hash2(i2,j2,imax2,jmax)] =
Bsupθ[hash2(i2,j2,imax2,jmax)]
+(Fbioθ(Jinr2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],Jinθ2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],Jinz2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],r[
i2],r[i],θ[j2],θ2[j])*yakobi(r[i],rmax,0.0)*yakobi(θ2[j],pi,θ[j2]+pi)

            +Fbioθ(Jinr2[hash2(i+1,j+1,imax,jmaxin)],Jinθ2[hash2(i+1,j+1,imax,jmaxin)],Jinz2[hash2(i
+1,j+1,imax,jmaxin)],r[i2],r[i+1],θ[j2],θ2[j+1])*yakobi(r[i+1],rmax,0.0)*yakobi(θ2[j+1],pi,θ[j2]+pi))/2.
0* (rtot(r[i + 1],rmax,0.0) - rtot(r[i],rmax,0.0))*(rtot(θ2[j+1],pi,θ[j2]+pi) - rtot(θ2[j],pi,θ[j2]+pi));
            Bsupz[hash2(i2,j2,imax2,jmax)] =
Bsupz[hash2(i2,j2,imax2,jmax)]
+(Fbioz(Jinr2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],Jinθ2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],Jinz2[hash2(i,j,imax,jmaxin)],r[
i2],r[i],θ[j2],θ2[j])*yakobi(r[i],rmax,0.0)*yakobi(θ2[j],pi,θ[j2]+pi)

            +Fbioz(Jinr2[hash2(i+1,j+1,imax,jmaxin)],Jinθ2[hash2(i+1,j+1,imax,jmaxin)],Jinz2[hash2(i
+1,j+1,imax,jmaxin)],r[i2],r[i+1],θ[j2],θ2[j+1])*yakobi(r[i+1],rmax,0.0)*yakobi(θ2[j+1],pi,θ[j2]+pi))/2.
0* (rtot(r[i + 1],rmax,0.0) - rtot(r[i],rmax,0.0))*(rtot(θ2[j+1],pi,θ[j2]+pi) - rtot(θ2[j],pi,θ[j2]+pi));
        }
    }
}
//境界条件の再定義

```

```

                Binr[hash2(imax,j2,imax,jmax)]
=(Bexr[hash2(imax,j2,imax2,jmax)]+Bsupr[hash2(imax,j2,imax2,jmax)]);
                Binθ[hash2(imax,j2,imax,jmax)]
=(Bexθ[hash2(imax,j2,imax2,jmax)]+Bsupθ[hash2(imax,j2,imax2,jmax)]);
                Binz[hash2(imax,j2,imax,jmax)]
(Bexz[hash2(imax,j2,imax2,jmax)]+Bsupz[hash2(imax,j2,imax2,jmax)]);
                }
                f++;
        }
}

```

上記ソース中で関数 `inkousi` が用いられている。関数 `inkousi` は二重指数型数値積分公式が使えるように θ を定義しなおし $\theta 2$ に入れて返す関数でソースを以下に示す。

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
void inkousi(double θ 2[],double θ ,int jmax){//DE 公式を θ 方向に使うときに新しく θ を定義する
    int j;
    double pi=acos(-1.0);

    double o = 0,p=0;

    θ2[0] = θ;
    θ2[jmax/2] = θ+pi;
    θ2[jmax] =θ+ 2*pi;

    for (j = 1; j <= jmax/2; j++){
        o = o +pow(double(j),3);//
    }

    for (j = 1; j <= jmax/2-1; j++){
        θ2[j] = θ2[j - 1] + (pi) / o*pow(double(j),3);//
    }
    for (j = jmax/2+1; j <= jmax-1; j++){
        θ2[j] = θ2[j - 1] + (pi) / o *pow(double(jmax-j+1),3);//
    }
}
}

```

また関数 `tanten` は x がどの x_a に挟まれているかを調べてその番号を返す関数である。以下に関数 `tanten`

のソースを示す。

```
int tanten(double xa[],double x){// x がどの xa に挟まれているかを調べてその番号を返す
    double e=1;int i=0;
    while(e>0){
        e=(x-xa[i])*(x-xa[i+1]);
        i++;
    }
    return i-1;
}
```

さらに関数 tyokusen は直線による近似を用いて x_2 と x_1 の間の x に対して y を返す関数で関数 inkousi によって定義された θ_2 に対応する J_{in} の値を近似的に求める。 x_1 と x_2 は関数 tanten で見つける。

```
double tyokusen(double x,double y2,double y1,double x2,double x1){//直線による近似を用いて x2 と x1
の間の x に対して y を返す
    double y,a,b;
    a=(y2-y1)/(x2-x1);
    b=y2-a*x2;
    y=a*x+b;
    return y;
}
```

関数 Fbior はビオ・サバールの法則の被積分関数を返す関数である。

```
double Fbior(double Jr,double J $\theta$ ,double Jz,double r2,double r,double  $\theta_2$ ,double  $\theta$ ){//ビオサバールの
法則の被積分関数を返す(ヤコビアン of r も含む)
    double myu0 = 1.2566370624e-6, pi = acos(-1.0);
    return myu0 / 2.0 / pi*( - Jz * r * sin( $\theta_2$  -  $\theta$ )) / (r2 * r2 + r * r - 2.0 * r2 * r * cos( $\theta_2$  -  $\theta$ ))*r;
}
double Fbio $\theta$ (double Jr,double J $\theta$ ,double Jz,double r2,double r,double  $\theta_2$ ,double  $\theta$ ){
    double myu0 = 1.2566370624e-6, pi = acos(-1.0);
    return myu0 / 2.0 / pi*(Jz * r2 - Jz * r * cos( $\theta_2$  -  $\theta$ )) / (r2 * r2 + r * r - 2.0 * r2 * r * cos( $\theta_2$  -
 $\theta$ ))*r;
}
double Fbioz(double Jr,double J $\theta$ ,double Jz,double r2,double r,double  $\theta_2$ ,double  $\theta$ ){
    double myu0 = 1.2566370624e-6, pi = acos(-1.0);
    return myu0 / 2.0 / pi*(Jr * r2 * sin( $\theta_2$  -  $\theta$ ) - J $\theta$  * (r2 * cos( $\theta_2$  -  $\theta$ ) - r)) / (r2 * r2 + r * r - 2.0 * r2
* r * cos( $\theta_2$  -  $\theta$ ))*r;
}
```

関数 yakobi は二重指数変換によるヤコビアンを返す。

```
double yakobi(double x,double haba,double tyusin){
    double pi=acos(-1.0);
```

```

return haba*pi/2.0*cosh(rtot(x,haba,tyusin))*(1.0-(x-tyusin)/haba*(x-tyusin)/haba);
}

```

12. ローレンツ力の計算

つり合いの式中に現れるローレンツ力を計算する。以下にプログラムのソースを示す。

```

//ローレンツ力の計算
Fx=0;Fy=0;Fz=0;
for(i=1;i<=imax-1;i++){
    for(j=0;j<=jmax-1;j++){

        Fx=Fx+(rorentx(Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)],Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)],Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)],Bexr[hash2(i,j,imax2,jmax)],Bexθ[hash2(i,j,imax2,jmax)],Bexz[hash2(i,j,imax2,jmax)],r[i],θ[j])

        +rorentx(Jinr[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Jinθ[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Jinz[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Bexr[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],Bexθ[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],Bexz[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],r[i+1],θ[j+1]))/2.0*(r[i+1]-r[i])*(θ[j+1]-θ[j]);

        Fy=Fy+(rorenty(Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)],Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)],Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)],Bexr[hash2(i,j,imax2,jmax)],Bexθ[hash2(i,j,imax2,jmax)],Bexz[hash2(i,j,imax2,jmax)],r[i],θ[j])

        +rorenty(Jinr[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Jinθ[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Jinz[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Bexr[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],Bexθ[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],Bexz[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],r[i+1],θ[j+1]))/2.0*(r[i+1]-r[i])*(θ[j+1]-θ[j]);

        Fz=Fz+(rorentz(Jinr[hash2(i,j,imax,jmax)],Jinθ[hash2(i,j,imax,jmax)],Jinz[hash2(i,j,imax,jmax)],Bexr[hash2(i,j,imax2,jmax)],Bexθ[hash2(i,j,imax2,jmax)],Bexz[hash2(i,j,imax2,jmax)],r[i],θ[j])

        +rorentz(Jinr[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Jinθ[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Jinz[hash2(i+1,j+1,imax,jmax)],Bexr[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],Bexθ[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],Bexz[hash2(i+1,j+1,imax2,jmax)],r[i+1],θ[j+1]))/2.0*(r[i+1]-r[i])*(θ[j+1]-θ[j]);

    }
}

```

関数 rorent はローレンツ力の被積分関数を計算する。

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
double rorentx(double Jr,double Jθ ,double Jz,double Br,double Bθ ,double Bz,double r,double θ){//
円筒座標の J と B から x 方向のローレンツ力を求める。ヤコビアン含む

```

```

        return ((J0*Bz-Jz*B0)*cos(θ)-(Jz*Br-Jr*Bz)*sin(θ))*r;
    }
double rorenty(double Jr,double J0,double Jz,double Br,double B0,double Bz,double r,double θ){
    return ((J0*Bz-Jz*B0)*sin(θ)+(Jz*Br-Jr*Bz)*cos(θ))*r;
}
double rorentz(double Jr,double J0,double Jz,double Br,double B0,double Bz,double r,double θ){
    return (Jr*B0-J0*Br)*r;
}

```

13. ニュートン法による新しい磁石の位置の決定とニュートン法の終わり

ニュートン法によって新しい磁石の位置を決定する。以下にプログラムのソースを示す。

```

        if(fabs((-Fy-Mg)/Mg)>e3){
            //新しい磁石の位置
            if(pm>0){
                ym1=ym1+bai;
                ym2=ym2+bai;
            }
            if(pm<0){
                ym1=(-Fy-Mg-(-Fy-Mg-Fay)/bai*ym1)/((-Fy-Mg-Fay)/bai);
                ym2=(-Fy-Mg-(-Fy-Mg-Fay)/bai*ym2)/((-Fy-Mg-Fay)/bai);
            }
        }

        Fax=-Fx;Fay=-Fy-Mg;Faz=-Fz;
        pm=pm*(-1);
        fo++;
    }

```