

2020 年以降の研究の概要

研究題目：双曲的代数曲線の数論幾何学の研究

私は、遠アーベル幾何学などといった観点を中心として、双曲的な代数曲線の数論幾何学の研究を行ってきた。

[3], [5], [9], [11], [17], [19], [22] は、代数多様体に対する遠アーベル幾何学に関連する研究の成果である。[3] では、一般次元の狭義単調減少型双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想を解決した。そして、その応用として、有理数体の有限生成拡大体上の任意の非特異代数多様体が遠アーベル多様体による開基を持つか、という Grothendieck による遠アーベル幾何学における古典的な問題を、一般化劣 p 進体というより一般的な基礎体上において解決することに成功した。[5] では、辻村昇太氏と室谷岳寛氏との共同研究によって、実閉体上の代数多様体の代数的基本群の研究を行い、特に、実閉体上の適当な代数多様体の代数的基本群における幾何学的部分群の単遠アーベル的復元アルゴリズムを確立した。[9] では、準三点基の絶対版遠アーベル幾何学の研究を行い、特に、ある条件を満たす一般化劣 p 進体上の準三点基に対する遠アーベル予想の絶対版を解決した。そして、その応用として、非特異代数多様体の遠アーベル多様体による開基の存在という Grothendieck による古典的な問題の絶対版を、ある条件を満たす一般化劣 p 進体上の場合に証明した。[11] では、南出新氏、望月新一氏、Ivan Fesenko 氏、Wojciech Porowski 氏との共同研究として、宇宙際タイヒミュラー理論の研究を行った。特に、剰余標数 2 の設定におけるエタールテータ関数の理論を確立させて、それを基に宇宙際タイヒミュラー理論を発展させた。この発展により、有理数体や虚二次体上でのディオファントス幾何学に関して、従来の宇宙際タイヒミュラー理論による帰結よりも、より精密な帰結を得ることに成功した。そして、その応用として、Fermat 予想の別証明を与えた。[17] では、2000 年以降の 20 年ほどの間の代数多様体に対する数論的な遠アーベル幾何学の研究の解説を行った。[19] では、双曲的代数曲線という概念の遠アーベル幾何学的観点における純位相群論的抽象化として、双曲的代数曲線という概念を導入して、その一般論の整備を行い、特に、双曲的代数曲線の部分的コンパクト化の理論、及び、双曲的代数曲線の有限群による商の理論を整備した。[22] では、飯島優氏と共同で、準モノドロミー充満な双曲的代数曲線の幾何学的同型類のガロア理論的特徴付けの研究を行い、特に、与えられた設定の数値的不変量がある条件を満たす場合に、劣 p 進体上の準 p モノドロミー充満な双曲的代数曲線の幾何学的同型類が、曲線に付随する副 p 外ガロア表現の核の通約類によって完全に決定されることを証明した。

[12], [13], [14], [21] は、数論的な体に対する遠アーベル幾何学に関連する研究の成果である。[12] では、西尾優氏と共同で、混標数局所体の絶対ガロア群の研究を行い、特に、適当な条件を満たす混標数局所体の絶対ガロア群の外部自己同型群の中で、体論的な外部自己同型射のなす部分群が、その共役たちが無限集合を成す非正規部分群であることを証明した。[13] では、単遠アーベル幾何学の解説、特に、混標数局所体に対する単遠アーベル幾何学の解説を行った。[14] では、数体の可解閉拡大に対する古典的な遠アーベル的復元定理の自然な延長線上の研究として、数体の可解閉拡大のガロア群に対する単遠アーベル的復元アルゴリズムを確立した。[21] では、辻村昇太氏と共同で、体の自己同型群からその体の絶対ガロア群の外部自己同型群への自然な射の単射性の研究を行い、特に、与えられた体が、例えば、混標数ネーター局所整域の商体の部分体と同型であるとき、あるいは、非自明な離散付値を持つ正標数の体であるときには、そのような射が単射となることを証明した。

[2], [10], [15] は、組み合わせ論的遠アーベル幾何学に関連する研究の成果である。[2] では、組み合わせ論的遠アーベル幾何学においてしばしば重要な役割を果たす PIPSC 型外表現の研究を行い、特に、非カスプ的な場合の PIPSC 型副有限群に対する、付随する副有限グラフの単遠アーベル的復元アルゴリズムを確立した。[10] では、望月新一氏との共同研究として、組み合わせ論的遠アーベル幾何学における様々な話題の研究を行った。特に、節点非退化外表現に関する組み合わせ論版遠アーベル予想の研究、双曲的代数的リーマン面の純組紐群の副有限完備化のファイバー保存的な連続外部自己同型射に対する組み合わせ論的カスプ化の研究、三点基の同期化の理論の確立、組み合わせ論的カスプ化の貼り合わせの理論の研究などを行った。[15] では、南出新氏と望月新一氏との共同研究として、有限型双曲的リーマン面の純組紐群の副有限完備化の研究を行った。特に、そのような副有限完備化の純群論的構造から、設定に付随する様々な数値的不変量や、一般化ファイバー部分群と呼ばれるその副有限完備化の閉部分群を復元する単遠アーベル的復元アルゴリズムを確立した。そして、そのような復元アルゴリズムの応用として、グロタンディーク・タイヒミュラー群に対する簡明で純群論的な表示を得ることに成功した。

[1], [7], [20], [23] は、正標数における双曲的代数曲線の数論幾何学に関連する研究の成果である。[1] では、古典的なリーマン面の理論における、正則座標、射影構造、固有束という概念の間のある自然な関係の正標数類似として、正標数射影的双曲的代数曲線上の擬座標、フロベニウス射影構造、フロベニウス固有構造の間の自然な関係を確立した。[7] では、丹後曲線の存在に関する研究を行った。[20] では、[1] の研究のアフィン版として、正標数射影的双曲的代数曲線上の丹後関数、フロベニウスアフィン構造、フロベニウスアフィン固有構造の間の自然な関係を確立した。[23] では、若林泰央氏と共同で、正標数射影的双曲的代数曲線の上の安定ベクトル束のモジュライ空間の研究を行い、特に、固定された正標数射影的双曲的代数曲線に対して、次数 0 階数 2 の安定ベクトル束のモジュライ空間の、フロベニウス引き戻しを考えることによって得られる自己有理写像の次数の上限を与えた。

[4], [6], [8], [16], [18], [24], [25] は、より一般的な数論幾何学に関連する研究の成果である。[4] では、代数曲線上の代数多様体のホモトピー系列の完全性の研究を行い、その応用として、2次元双曲的多重曲線に対する遠アーベル予想の研究における応用を得た。[6] では、デュドネ加群の理論と有限本田系の理論を用いて、標数 $p > 0$ の完全体上の p 振れ有限平坦可換群スキームの変形の研究を行い、特に、 p が奇数の場合の主準偏極可能で擬剛的なそのような群スキームが超特別であることを証明した。[8] では、Mumford によるテータ群の理論を用いて、アーベル多様体の上の豊富な有効因子に含まれる等分点の研究を行い、その応用として、Raynaud によるテータ因子の理論を適用することで、例えば、奇数標数 p の代数的閉体上の射影的双曲的代数曲線に対して、位数が $p-1$ の約数である新通常の可逆層が存在することを証明した。[16] では、絶対不分岐底上安定還元を持つ代数曲線の等分点の分岐の研究を行い、特に、Coleman による絶対不分岐底上超特別良還元を持つ代数曲線の等分点の不分岐性に関する定理を、絶対不分岐底上超特別安定還元を持つ場合に一般化した。[18] では、固定された素数冪次数のヤコビ和たちを有理数体に添加して得られる数体を決定した。[24] では、 p 進ガロア表現の内在的ホッジ・テイト性の研究を行い、特に、1次元 p 進ガロア表現に対してホッジ・テイト性と内在的ホッジ・テイト性が同値であることを証明して、また、内在的ホッジ・テイト的でない既約でアーベルかつクリスタル的な2次元 p 進ガロア表現の例を構成した。[25] では、双曲的コンパクトリーマン面上の固有束の存在のシュワルツ微分を用いた証明と、標数 2 の射影的双曲的代数曲線上のレベル 2 丹後関数の存在の杉山・安田局所完全微分形式を用いた証明を、統一された枠組によって理解するために、シュワルツ系という概念に定式化を与えて、そして、その一般論を確立した。

2020 年以降に出版された論文等のリスト

- [1] Frobenius-projective structures on curves in positive characteristic, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **56** (2020), no. **2**, 401-430.
- [2] Reconstruction of profinite graphs from profinite groups of PIPSC-type, *Hokkaido Math. J.* **49** (2020), no. **3**, 399-430.
- [3] A note on an anabelian open basis for a smooth variety, *Tohoku Math. J. (2)* **72** (2020), no. **4**, 537-550.
- [4] Homotopy sequences for varieties over curves, *Kobe J. Math.* **37** (2020), no. **1-2**, 41-66.
- [5] On the geometric subgroups of the étale fundamental groups of varieties over real closed fields (with Takahiro Murotani and Shota Tsujimura), *Math. Z.* **298** (2021), no. **1-2**, 215-229.
- [6] Pseudo-rigid p -torsion finite flat commutative group schemes, *J. Number Theory* **229** (2021), 261-276.
- [7] A note on the existence of Tango curves, *Kodai Math. J.* **44** (2021), no. **1**, 77-80.
- [8] A note on torsion points on ample divisors on abelian varieties, *Math. J. Okayama Univ.* **64** (2022), 1-11.
- [9] The absolute anabelian geometry of quasi-tripods, *Kyoto J. Math.* **62** (2022), no. **1**, 179-224.
- [10] Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves II: tripods and combinatorial cuspidalization (with Shinichi Mochizuki), *Lecture Notes in Mathematics*, **2299**. Springer, Singapore, [2022].

- [11] Explicit estimates in inter-universal Teichmüller theory (with Shinichi Mochizuki, Ivan Fesenko, Arata Minamide, and Wojciech Porowski), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **2**, 175-236.
- [12] On the outer automorphism groups of the absolute Galois groups of mixed-characteristic local fields (with Yu Nishio), *Res. Number Theory* **8** (2022), no. **3**, Paper No. **56**, 13 pp.
- [13] Introduction to mono-anabelian geometry, Publications mathématiques de Besançon. Algèbre et théorie des nombres, 2021, 5-44, *Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., 2021*, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2021.
- [14] Mono-anabelian reconstruction of solvably closed Galois extensions of number fields, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **29** (2022), no. **3**, 257-283.
- [15] Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups (with Arata Minamide and Shinichi Mochizuki), *Kodai Math. J.* **45** (2022), no. **3**, 295-348.
- [16] Ramification of torsion points on a curve with superspecial reduction over an absolutely unramified base, *Tohoku Math. J. (2)* **74** (2022), no. **4**, 521-534.
- [17] 遠アーベル幾何学の進展, *数学* **74** (2022), no. **1**, 1-30.
- [18] A note on fields generated by Jacobi sums, *Math. J. Okayama Univ.* **65** (2023), 117-123.
- [19] The geometry of hyperbolic curvoids, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **59** (2023), no. **1**, 1-55.
- [20] Frobenius-affine structures and Tango curves, *Nagoya Math. J.* **250** (2023), 385-409
- [21] On the injectivity of the homomorphisms from the automorphism groups of fields to the outer automorphism groups of the absolute Galois groups (with Shota Tsujimura), *Res. Number Theory* **9** (2023), no. **2**, Paper No. **44**, 13 pp.
- [22] Galois-theoretic characterization of geometric isomorphism classes of quasi-monodromically full hyperbolic curves with small numerical invariants (with Yu Iijima), *J. Algebra* **634** (2023), 480-511.
- [23] An upper bound on the generic degree of the generalized Verschiebung for rank two stable bundles (with Yasuhiro Wakabayashi), *J. Pure Appl. Algebra* **228** (2024), no. **6**, Paper No. 107605, 14 pp.
- [24] On intrinsic Hodge-Tate-ness of Galois representations of dimension two, *Kodai Math. J.* **47** (2024), no. **1**, 99-111.
- [25] A note on Schwarzian derivatives and Sugiyama-Yasuda locally exact differentials, *Osaka J. Math.* **61** (2024), no. **3**, 313-333.