

研究業績報告書

1. 研究内容 (文章内の“[-]”については、“2. 論文”を参照.)

私はこれまで“遠アーベル幾何学”という観点を中心として、双曲的な代数曲線、及び、それから派生する代数多様体の数論的基本群の研究を行ってきた。以下、これまでの研究を 4 つのテーマに分類して、その内容を報告する。

A. カスプ化問題

論文 [2], [3] では、双曲的曲線の基本群に対するカスプ化問題の研究を行った。双曲的曲線の基本群に対するカスプ化問題とは、与えられた双曲的曲線の基本群から、その曲線の開部分スキームや配置空間の基本群を群論的、関手的に復元することができるか、という問題である。

[2] において、一般の体上の双曲的曲線に対するカスプ化問題の考察を行い、[3] において、有限体上の固有な双曲的曲線の基本群に対するカスプ化問題の副 ℓ 版を肯定的に解決した。これらカスプ化問題の研究において、[1] で行われた対数的基本群の一般論、特に、対数的ホモトピー系列の完全性の研究が基本的な役割を果たしている。

B. 遠アーベル幾何学におけるモノドロミー充満性

論文 [6], [8], [9] では、双曲的曲線やその配置空間の点に対するモノドロミー充満性についての研究が行われている。素数 ℓ に対して、双曲的曲線やその配置空間の点に付随する副 ℓ 外 Galois 表現や副 ℓ Galois 表現の像が非常に大きいときに、その双曲的曲線や配置空間の点は ℓ モノドロミー充満であるという。

[6] では、モノドロミー充満な双曲的曲線の一般論の研究を行い、特に、種数が 0 の ℓ モノドロミー充満な双曲的曲線の同型類は、その曲線に付随する副 ℓ 外 Galois 表現の核によって決定されるという、Grothendieck 予想型の結果を証明した。[8] では、双曲的曲線の配置空間のモノドロミー充満な点に関する研究を行い、双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の核と有理点付き双曲的曲線に付随する Galois 表現の核の比較に関する松本眞氏による結果の部分的一般化を与え、また、双曲的曲線の配置空間の ℓ モノドロミー充満な点の同値類は、その点に付随する副 ℓ Galois 表現の核によって決定されるという、Grothendieck 予想型の結果を証明した。[9] では、玉川安騎男氏と松本眞氏によって提出された双曲的曲線のモノドロミー充満性に関するある問題を種数が 0 の場合に考察して、特に、種数が 0 の場合には、双曲的曲線に対する準 ℓ モノドロミー充満性は ℓ に対して独立的ではないという、その問題に対する否定的命題を証明した。

C. セクション予想

論文 [7] では, 遠アーベル幾何学における未解決予想の一つであるセクション予想の研究が行われている. セクション予想とは, 数体 k 上の固有な双曲的曲線 X に対して, X の k 有理点たちのなす集合から, Galois セクション (X の数論的基本群から k の絶対 Galois 群への自然な全射のセクション) たちの (適当な共役類の) なす集合への自然な写像は全単射である, という予想である. この論文では, このセクション予想の副 p 版, つまり, “Galois セクションたちのなす集合” を “副 p Galois セクション (X の幾何学的副 p 数論的基本群から k の絶対 Galois 群への自然な全射のセクション) たちのなす集合” に取り替えた場合のセクション予想についての考察を行っている.

具体的には, (望月新一氏によって, 双曲的曲線に対する遠アーベル Grothendieck 予想はその副 p 版も成立することが証明されているにもかかわらず) セクション予想の副 p 版は一般には成立しないこと, また, (Faltings による Mordell 予想の解決によって, 数体上の固有な双曲的曲線の有理点は高々有限個であることが証明されているにもかかわらず) 無限に多くの副 p Galois セクション (の共役類) を持つような数体上の固有な双曲的曲線が存在することを証明した.

D. 組み合わせ論的遠アーベル幾何学

望月新一氏との共同研究 [4], [10] では, 組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究を行った. [4] では, ノード非退化な外表現に対する組み合わせ論的 Grothendieck 予想型の結果を証明して, その系として, 組み合わせ論的カスプ化の単射性を得た. (この単射性について, [5] として日本語による解説を書いた.) そして, この単射性によって, Belyi や松本眞氏によって証明されていた, 数体や p 進局所体などといった体の上の非固有な双曲的曲線の数論的基本群から生じる外 Galois 表現の忠実性を, 固有な双曲的曲線に対して一般化した. また, [10] では, 配置空間群の間の同型射に対する FC 適合性, PSC 型遠半グラフから生じる様々な円分物の群論的同期化, 副有限 Dehn 捻りの一般論, 円分物の群論的同期化とスキーム論的同期化の副有限 Dehn 捻りに関する比較, 標点付き曲線のモジュライ空間上の普遍曲線に対する幾何学版 Grothendieck 予想などといった話題についての研究が行われている.

2. 論文 (プレプリントを含む.)

- [1] The exactness of the log homotopy sequence, *Hiroshima Math. J.* **39** (2009), no. **1**, 61-121.
- [2] On the fundamental groups of log configuration schemes, *Math. J. Okayama Univ.* **51** (2009), 1-26.
- [3] Absolute anabelian cuspidalizations of configuration spaces of proper hyperbolic curves over finite fields, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. **3**, 661-744.
- [4] On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations (with Shinichi Mochizuki), to appear in *Hiroshima Math. J.*
- [5] 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B19** (2010), 81-106.
- [6] Galois-theoretic characterization of isomorphism classes of monodromically full hyperbolic curves of genus zero, to appear in *Nagoya Math. J.*
- [7] Existence of nongeometric pro- p Galois sections of hyperbolic curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), no. **4**, 829-848.
- [8] *On monodromically full points of configuration spaces of hyperbolic curves*, RIMS preprint **1700**.
- [9] *On a problem of Matsumoto and Tamagawa concerning monodromic fullness of hyperbolic curves: Genus zero case*, RIMS preprint **1702**.
- [10] *Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists* (with Shinichi Mochizuki), RIMS preprint **1719**.