

位相曲面に対するある Grothendieck 予想型の結果について

星 裕一郎*

京都大学 数理解析研究所

0 序

まず最初に, 第 10 回城崎新人セミナーでの全体講演の機会を与えてくださり, また, セミナーの運営にご尽力くださった運営委員の皆様にご感謝申し上げます.

第 10 回城崎新人セミナーでは“遠アーベル幾何学概論”という題目で講演をさせていただきました. 最初の“1. Riemann 面の族とその基本群”という節では, 従来の遠アーベル幾何学の設定の幾何学的な類似として, [代数的な] 複素多様体上のコンパクト Riemann 面の族を考察しました. そういった族に対してモノドロミー外作用を定義して, 特に, 複素平面から有限個の点を除いて得られる Riemann 面上のコンパクト Riemann 面の族に対して, モノドロミー外作用を通じて族のどのような幾何学が見えてくるか, といったことについての結果を紹介しました. 次に“2. 数論的基本群”という節で, 遠アーベル幾何学における主要な概念の 1 つである数論的基本群の定義を簡単に復習して, そのいくつかの例を挙げました. そして, 最後の“3. 遠アーベル幾何学”という節において, 遠アーベル幾何学とはどういったことについて研究を行う分野なのか, という説明を簡単にいき, また, Grothendieck 予想の定式化を述べてから, これまでに知られているいくつかの結果を紹介しました.

全体講演のご依頼をいただいた際の要請から, 講演は“お話”に終始せざるを得ず, きちんとした数学の話はまったくできませんでした. ですので, もう少し本格的に遠アーベル幾何学の雰囲気を感じていただくために, この原稿では, より数学的な議論を展開しようと考えました. 一方, 従来の遠アーベル幾何学の設定で何かをしようとすると, 例えば“絶対 Galois 群”などといった, いかにも難しそうな概念の登場を避けることは困難であり, それでは読者が非常に限定されます. そこで, ここでは, 講演の第 1 節の延長線上にある話題として, “代数的な位相曲面に対する Grothendieck 予想のある類似”について解説したいと思います.

この原稿の内容は, [HM] の 1 節で行われている議論の最初のアイデアであり, 本質的には [MT] の 4 節に書かれていると考えることができます. この原稿で説明したい最終的な結論は, 大雑把には, 以下のようなものです:

非球面的代数的位相曲面 [下の図 1 のような位相曲面で, $(g, r) \neq (0, 0)$ であるもの] に対して:

- 曲面がコンパクトな場合 [つまり, 下図 1 で $r = 0$ の場合], 基本群の同型類によって曲面の同相類が完全に決定される [定理 1.1 を参照].
- 曲面が非コンパクトな場合 [つまり, 下図 1 で $r \neq 0$ の場合], 基本群だけでは曲面の同相類は決定されない [命題 1.3 を参照].
- コンパクト, 非コンパクトに関わらず, その曲面の 2 本系組紐群¹ $[+\alpha]$ の同型類は, 元の曲面の同相類を完全に決定する [定理 2.1, 及び, 注意 2.2 を参照].

*yuichiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

¹§2 で説明しますが, これは, その曲面の 2 点配置の空間の基本群のことです.

最後に、原稿の内容に関する数学的な注意ですが、この原稿では、不必要に難解に感じさせないことを目的に、“普通の位相的基本群”について議論をしていますが、ここにあらわれる結論は、“基本群”を“基本群の副有限完備化”に取替えても [つまり、適当な意味において、講演で説明した“数論的基本群”を考えても] 同様の結果が成立します²。

1 代数的位相曲面の基本群

非負整数の組 (g, r) に対して、位相空間 X が“種数 g の向き付け可能なコンパクト連結位相曲面から r 個の相異なる点を除いて得られる位相空間”と同相であるとき、 X を $[(g, r)$ 型] 代数的位相曲面 と呼ぶことにしましょう [下の図 1 を参照]³。このとき、以下の事実が知られています：

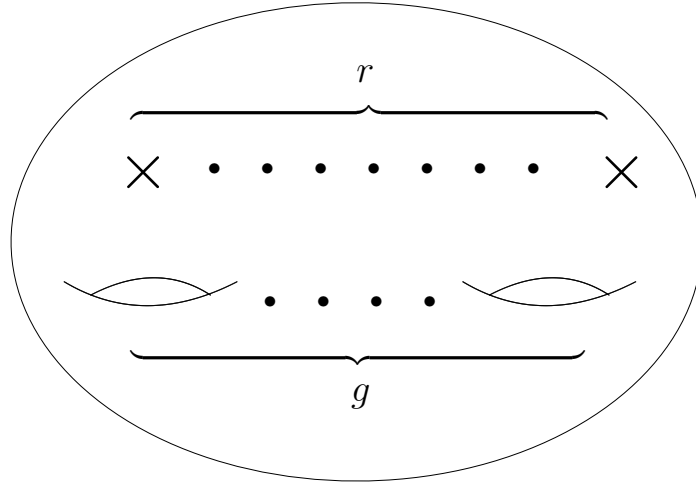


図 1: (g, r) 型代数的位相曲面

(1) (g, r) 型代数的位相曲面の同相類は (g, r) のみで決定される。また、 (g, r) 型代数的位相曲面と (g', r') 型代数的位相曲面が同相であることと $(g, r) = (g', r')$ となることは同値。

(2) (g, r) 型代数的位相曲面の整係数コホモロジー群は、以下のような表示を持つ：

$$H^i((g, r) \text{ 型代数的位相曲面}, \mathbf{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} & i = 0 \text{ あるいは } (i, r) = (2, 0) \\ \mathbf{Z}^{\oplus 2g + \max\{0, r-1\}} & i = 1 \\ \{0\} & \text{その他} \end{cases}.$$

(3) (g, r) 型代数的位相曲面の基本群は、以下のような表示を持つ：

$$\pi_1((g, r) \text{ 型代数的位相曲面}) \simeq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle / \prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] \cdot \prod_{j=1}^r \gamma_j.$$

²実際、[HM] や [MT] では、そのような完備化に対して議論を行っています。

³この“代数的”という用語は、“そのような位相空間の同相類全体のなす集合と複素数体上の滑らかな代数曲線から定まる Riemann 面の下部位相空間の同相類全体のなす集合は一致する”という事実から採用しました。

(4) (g, r) 型代数的位相曲面は $(g, r) \neq (0, 0)$ であれば [つまり, 球面と同相でなければ], $K(\pi, 1)$ 空間となる⁴.

(g, r) が $2 - 2g - r < 0$ を満たすとき, (g, r) 型代数的位相曲面は 双曲的 であるということにしましょう⁵. また, $(g, r) \neq (0, 0)$ であるとき, つまり, (g, r) 型代数的位相曲面が球面と同相でないとき, その代数的位相曲面は 非球面的 であるということにします. すると, 上述の事実から, 以下の帰結が導かれます:

(5) (3) で与えられた表示から, 双曲的でない [つまり, $2 - 2g - r \geq 0$ であるような型の] 代数的位相曲面の基本群はアーベル群⁶ となる.

(6) X を非球面的代数的位相曲面とすると, (4) [と $K(\pi, 1)$ 空間の一般論] から, 任意の整数 i に対して, 自然な同型射

$$H^i(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbf{Z})$$

が存在する⁷.

(7) (3) で与えられた表示から, コンパクトでない [つまり, $r \neq 0$ であるような] (g, r) 型代数的位相曲面の基本群は, 階数 $2g + r - 1$ の自由群となる.

(8) 一方, コンパクトな [つまり, $r = 0$ であるような型の] 非球面的代数的位相曲面の基本群は自由群ではない. 実際, (2) と (6) によって,

$$H^2(\pi_1(\text{コンパクトな非球面的代数的位相曲面}), \mathbf{Z}) \simeq H^2(\text{コンパクトな非球面的代数的位相曲面}, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \neq \{0\}$$

であるので, 群コホモロジーの一般論から, $\pi_1(\text{コンパクトな非球面的代数的位相曲面})$ は自由群ではない.

これまで観察した事実から, コンパクトな [つまり, $r = 0$ であるような型の] 非球面的代数的位相曲面に対して, 以下の Grothendieck 予想型の結果が得られます:

定理 1.1. X, Y を非球面的代数的位相曲面とする. また, X か Y のいずれかがコンパクトであると仮定する. このとき, $\pi_1(X)$ と $\pi_1(Y)$ が同型ならば, X と Y は同相.

注意 1.2. §0 の最後で述べたとおり, 定理 1.1 の主張の中の基本群をその副有限完備化に取替えた主張も [下の議論と同様の議論から] 従います.

定理 1.1 は以下のように証明することができます: $(g_X, r_X), (g_Y, r_Y)$ をそれぞれ X, Y の型とします. X をコンパクト [つまり, $r_X = 0$] と仮定しても一般性を失わないので, そのように仮定しましょう. すると, 事実 (8) によって, $\pi_1(X)$ は自由群ではありません. 特に, $\pi_1(Y)$ は $\pi_1(X)$ と同型ですので, $\pi_1(Y)$ も自由群ではありません. 従って, 事実 (7) によって Y もコンパクト [つまり, $r_Y = 0$] であることがわかります. すると, 事実 (2) と (6) によって,

$$\mathbf{Z}^{\oplus 2g_X} \simeq H^1(X, \mathbf{Z}) \simeq H^1(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \simeq H^1(\pi_1(Y), \mathbf{Z}) \simeq H^1(Y, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{\oplus 2g_Y}$$

から $g_X = g_Y$ がわかり, $[r_X = r_Y = 0$ を思い出すと] 事実 (1) から X と Y が同相であることがわかります.

定理 1.1 によって, コンパクトな非球面的代数的位相曲面の同相類はその基本群の同型類によって完全に決定されることがわかりました:

コンパクト非球面的代数的位相曲面の同相類 $\Leftrightarrow$ コンパクト非球面的代数的位相曲面の基本群の同型類

それではコンパクトでない場合はどうでしょうか? この問題に関連して, 以下の命題を得ることができます:

⁴2 以上の任意の整数 $i \geq 2$ に対して $\pi_i(X) = \{0\}$ となる位相空間 X を $K(\pi, 1)$ 空間と呼びます.

⁵この“双曲的”という用語は, “与えられた代数的位相曲面に対して, それがこの意味で双曲的となることと, その曲面に複素構造を与えてきた Riemann 面が双曲的となることは同値”という事実から採用しました.

⁶(3) の表示から “直ちに” 結論することは難しいと思われますが, 実はこの逆も成立します. つまり, 双曲的な代数的位相曲面の基本群は非アーベルとなります. 実は, より強く, その中心が自明となることも知られています.

⁷左辺は群コホモロジーです.

命題 1.3. $(g_X, r_X), (g_Y, r_Y)$ を非負整数の組, X を (g_X, r_X) 型非球面的代数的位相曲面, Y を (g_Y, r_Y) 型非球面的代数的位相曲面とする. また, X か Y のいずれかがコンパクトでないと仮定する. このとき, 以下の 2 条件は同値:

- (i) $\pi_1(X)$ と $\pi_1(Y)$ が同型.
- (ii) X, Y のいずれもコンパクトではなく, その上, 等式

$$2g_X + r_X - 1 = 2g_Y + r_Y - 1$$

が成立.

注意 1.4. §0 の最後で述べたとおり, 命題 1.3 の主張の中の基本群をその副有限完備化に取替えた主張も [下の議論と同様の議論から] 従います.

命題 1.3 の証明は以下のとおりです: (ii) $\Rightarrow$ (i) は上の事実 (7) から直ちに従います. 一方, (i) $\Rightarrow$ (ii) ですが, (i) $\Rightarrow$ “ X, Y のいずれもコンパクトではない” は定理 1.1 の帰結です. また, 上の事実 (2) と (6) によって得られる同型

$$\mathbf{Z}^{\oplus 2g_X + \max\{0, r_X - 1\}} \simeq H^1(X, \mathbf{Z}) \simeq H^1(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \simeq H^1(\pi_1(Y), \mathbf{Z}) \simeq H^1(Y, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{\oplus 2g_Y + \max\{0, r_Y - 1\}}$$

を考えることによって, 残りの部分が直ちに従います.

命題 1.3 によって, 例えば, $(0, 3)$ 型代数的位相曲面と $(1, 1)$ 型代数的位相曲面の基本群は同型であることがわかります. 一方, $(0, 3) \neq (1, 1)$ ですので, 上の事実 (1) から $(0, 3)$ 型代数的位相曲面と $(1, 1)$ 型代数的位相曲面は同相ではありません. これにより, 非コンパクトな代数的位相曲面に対しては, Grothendieck 予想型の結果は [少なくとも “もっとも安直な形” では] 成立しないことがわかりました.

非コンパクト代数的位相曲面の同相類 $\not\cong$ 非コンパクト代数的位相曲面の基本群の同型類

2 代数的位相曲面の組紐群

§1 での議論によって, 非コンパクトな代数的位相曲面に対して, その基本群は [非球面的代数的位相曲面の範囲においても] 完全な同相不変量とはなり得ないことがわかりました. そこで, [唐突ではありますが!] “代数的位相曲面の 2 本系組紐群” というものを考えてみたいと思います. 先に述べてしまいますと, この原稿の目標は, 大雑把には,

非球面的代数的位相曲面の同相類 $\Leftrightarrow$ 非球面的代数的位相曲面の 2 本系組紐群の同型類 $[+\alpha]$

という事実の証明の説明です.

“2 本系組紐群” は “2 点配置の空間” と呼ばれる空間の基本群として定義することができますので, まず “2 点配置の空間” を定義しましょう. 位相空間 X に対して, その 2 点配置の空間 X_2 を以下で定義します:

$$X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \neq x_2\}.$$

つまり, X_2 とは, “ X の相異なる [順序付き] 2 点全体, のなす空間” のことです. この X_2 の基本群 $\pi_1(X_2)$ は X の 2 本系 [純] 組紐群 と呼ばれています. $i \in \{1, 2\}$ に対して, 第 i 射影 $X_2 \rightarrow X: (x_1, x_2) \mapsto x_i$ を pr_i^X と書くことにしましょう. 以下, X を (g, r) 型代数的位相曲面とします.

(g, r) 型代数的位相曲面 X の 2 本系組紐群 $\pi_1(X_2)$ の構造を観察しましょう. 2 点配置の空間 X_2 について, まず以下の事実が確認できます:

(9) $i \in \{1, 2\}$ に対して, 射影 $\text{pr}_i^X: X_2 \rightarrow X$ は局所自明なファイブレーション. また, $x \in X$ に対して, $\text{pr}_i^X: X_2 \rightarrow X$ の $x \in X$ でのファイバー $(\text{pr}_i^X)^{-1}(x)$ は, 自然に $X \setminus \{x\}$ と同一視できる. $[X \setminus \{x\}]$ は $(g, r+1)$ 型代数的位相曲面であることに注意!

この事実 (9) と、その上、(4) と (7) によって、以下が得られます:

(10) X を非球面的とすると, $i \in \{1, 2\}$, $x \in X$ に対して, $\text{pr}_i^X: X_2 \rightarrow X$ が定めるホモトピー系列

$$1 \longrightarrow \pi_1((\text{pr}_i^X)^{-1}(x)) \longrightarrow \pi_1(X_2) \xrightarrow{\pi_1(\text{pr}_i^X)} \pi_1(X) \longrightarrow 1$$

は完全. [最初の “ $1 \rightarrow$ ” は事実 (4) の帰結.] 特に, $\text{Ker}(\pi_1(\text{pr}_i^X)) \simeq \pi_1((\text{pr}_i^X)^{-1}(x)) \simeq \pi_1(X \setminus \{x\})$ は, 階数 $2g + r$ の自由群.

§1 での議論から, 問題は X が非コンパクトな場合の基本群の構造なのですが, X が非コンパクトな場合, (10) の完全系列と事実 (7) によって, $\pi_1(X_2)$ は以下のような拡大の構造を持つことがわかりました:

$$1 \longrightarrow (\text{階数 } 2g + r \text{ の自由群}) \longrightarrow \pi_1(X_2) \longrightarrow (\text{階数 } 2g + r - 1 \text{ の自由群}) \longrightarrow 1.$$

特に, $\pi_1(X_2)$ の “部品” である, 上の完全系列の左と右の群は, “ $2g + r$ ” という不変量にしか依存しません. 従って, 例えば,

$$1 \longrightarrow (\text{階数 } 3 \text{ の自由群}) \longrightarrow \pi_1(((0, 3) \text{ 型代数的位相曲面})_2) \longrightarrow (\text{階数 } 2 \text{ の自由群}) \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow (\text{階数 } 3 \text{ の自由群}) \longrightarrow \pi_1(((1, 1) \text{ 型代数的位相曲面})_2) \longrightarrow (\text{階数 } 2 \text{ の自由群}) \longrightarrow 1$$

となるため, そういった “部品” だけを考えている限りにおいては, §1 の最後の方の議論から進歩しません. しかし, 部品だけを考えるのではなく, その拡大の情報も考えることによって, この “ $\pi_1(X_2)$ ” という群 $[\alpha]$ が “ X ” の完全な同相不変量になる, という事実を主張しているのが, 我々の目標としている以下の定理です:

定理 2.1. X, Y を非球面的代数的位相曲面とする. このとき, 以下の 2 条件は同値:

(i) X と Y は同相.

(ii) 同型射 $\alpha: \pi_1(X_2) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y_2)$ が存在がして, 以下が成立: $i \in \{1, 2\}$ に対して, α は $\text{Ker}(\pi_1(\text{pr}_i^X)) \subseteq \pi_1(X_2)$ から $\text{Ker}(\pi_1(\text{pr}_i^Y)) \subseteq \pi_1(Y_2)$ への全単射を定める.

注意 2.2. 定理 2.1 の設定のもと, $(g_X, r_X), (g_Y, r_Y)$ をそれぞれ X, Y の型とします. このとき, もしも

$$\{(g_X, r_X), (g_Y, r_Y)\} \cap \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1)\} = \emptyset$$

ならば, 玉川安騎男氏と望月新一氏の共同研究によって, 定理 2.1 の条件 (ii) と以下の条件 (ii') が同値であることが証明されています [[MT], Corollary 7.4, を参照; 副有限な場合には, [MT], Corollaries 4.8, 6.3, を参照]:

(ii') $\pi_1(X_2)$ と $\pi_1(Y_2)$ は同型.

従って, 上の例外的な型を除けば, $\pi_1(X_2)$ の同型類は X の同相類を完全に決定する, ということが帰結されます.

注意 2.3. §0 の最後で述べたとおり, 定理 2.1 の主張の中の基本群をその副有限完備化に取替えた主張も [§3 の議論と同様の議論から] 従います.

§3 で定理 2.1 の証明について説明します.

3 定理 2.1 の証明

定理 2.1 の証明を説明するために, 非球面的代数的位相曲面の 2 本系組紐群の群構造について, もう少し考察を続けたいと思います. X を (g, r) 型非球面的代数的位相曲面とします. すると, ホモトピー系列

の完全性を用いることによって, 2 つの射影 $X \times X \rightarrow X: (x_1, x_2) \mapsto x_i$ [$i \in \{1, 2\}$] から定まる準同型射 $\pi_1(X \times X) \rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ は同型射となることがわかります:

$$\pi_1(X \times X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X) \times \pi_1(X).$$

従って, 2 つの射影 $\text{pr}_i^X: X_2 \rightarrow X$ [$i \in \{1, 2\}$] から定まる準同型射 $\pi_1(X_2) \rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ は, 自然な開埋め込み $X_2 \hookrightarrow X \times X$ が誘導する準同型射と一致しますので, 特に全射であることがわかります:

$$\pi_1(X_2) \xrightarrow{(\text{pr}_1^X, \text{pr}_2^X)} \pi_1(X) \times \pi_1(X) \xleftarrow{\sim} \pi_1(X \times X).$$

以下, X に適当な複素構造を与えて, X を Riemann 面と考えることにします⁸. すると, 複素曲面 [つまり, 2 次元複素多様体] $X \times X$ 上には $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, x) \in X \times X\} \subseteq X \times X$ という有効因子が定まりますので, その第 1 Chern 類を $c_1(\Delta_X) \in H^2(X \times X, \mathbf{Z})$ と書くことにします. 一方, 有効因子 $\Delta_X \subseteq X \times X$ は直線束 $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta_X)$ を定めますので, その直線束からゼロセクションを除いて得られる主 $\mathbf{C}^\times$ 束を $\text{pr}^{\mathbf{L}_X}: \mathbf{L}_X \rightarrow X \times X$ と書くことにします. すると, 以下の補題が得られます:

補題 3.1.

(i) $X \times X$ は $K(\pi, 1)$ 空間. 特に, [事実 (6) と同様] 自然な同型射

$$H^2(\pi_1(X \times X), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X \times X, \mathbf{Z})$$

が存在.

(ii) 任意の $z \in X \times X$ に対して, 主 $\mathbf{C}^\times$ 束 $\text{pr}^{\mathbf{L}_X}: \mathbf{L}_X \rightarrow X \times X$ が定めるホモトピー系列

$$1 \longrightarrow \pi_1((\text{pr}^{\mathbf{L}_X})^{-1}(z)) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{L}_X) \xrightarrow{\pi_1(\text{pr}^{\mathbf{L}_X})} \pi_1(X \times X) \longrightarrow 1$$

は完全.

(iii) 同型 $\pi_1((\text{pr}^{\mathbf{L}_X})^{-1}(z)) \simeq \pi_1(\mathbf{C}^\times) \simeq \mathbf{Z}$ を固定する⁹. このとき, この同型と (ii) で考察された完全系列から得られる完全系列

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathbf{L}_X) \longrightarrow \pi_1(X \times X) \longrightarrow 1$$

の定める $H^2(\pi_1(X \times X), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X \times X, \mathbf{Z})$ [(i) を参照] の元¹⁰ は, ± 1 倍を除いて, 第 1 Chern 類 $c_1(\Delta_X) \in H^2(X \times X, \mathbf{Z})$ と一致.

(iv) X^{cpt} を X の滑らかなコンパクト化とする¹¹. このとき, Künneth 分解と (i) や事実 (6) の同型射によって構成される可換図式

$$\begin{array}{ccccc} H^2(\pi_1(X \times X), \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_{i+j=2} H^i(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} H^j(\pi_1(X), \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}^{(1,1)}} & H^1(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} H^1(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ H^2(X \times X, \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_{i+j=2} H^i(X, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} H^j(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{pr}^{(1,1)}} & H^1(X, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} H^1(X, \mathbf{Z}) \end{array}$$

において, 左下の群の元 $c_1(\Delta_X) \in H^2(X \times X, \mathbf{Z})$ によって定まる右上の群

$$\begin{aligned} H^1(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} H^1(\pi_1(X), \mathbf{Z}) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X), \mathbf{Z}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X)^{\text{ab}}, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X)^{\text{ab}}, \mathbf{Z})) \end{aligned}$$

⁸代数的位相曲面はいつでもある Riemann 面の下部位相空間となります.

⁹ここに登場する 3 つの群はどれも $\mathbf{Z}$ と同型ですので, $\mathbf{Z}$ の自己同型群が $\mathbf{Z}^\times = \{1, -1\}$ であるという事実から, これら同型の選択はそれぞれ 2 通りです.

¹⁰群コホモロジーの一般論から, 群 G に対して, $H^2(G, \mathbf{Z})$ という集合と, G の $\mathbf{Z}$ による中心拡大 [つまり, $\mathbf{Z} \subseteq Z(E)$ となるような群拡大

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1]$$

の適当な同値類のなす集合との間に, 自然な全単射が存在します. 特に, G の $\mathbf{Z}$ による中心拡大が与えられると, $H^2(G, \mathbf{Z})$ の元が定まります.

¹¹従って, X^{cpt} は種数 g のコンパクト Riemann 面です.

の元は, X^{cpt} の Poincaré 双対, つまり, 以下の合成として得られる準同型射:

$$\pi_1(X)^{\text{ab}} \twoheadrightarrow \pi_1(X^{\text{cpt}})^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X^{\text{cpt}})^{\text{ab}}, \mathbf{Z}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X)^{\text{ab}}, \mathbf{Z}).$$

ここで, 1 番目の射は自然な開埋め込み $X \hookrightarrow X^{\text{cpt}}$ から誘導される全射, 2 番目の射は X^{cpt} の Poincaré 双対射, 3 番目の射は自然な開埋め込み $X \hookrightarrow X^{\text{cpt}}$ から誘導される単射.

(i) は, X が $K(\pi, 1)$ 空間であること [事実 (4) を参照] から, 例えば射影 $X \times X \rightarrow X: (x_1, x_2) \mapsto x_1$ に付随するホモトピー系列の完全性を考えることによって証明できます. (ii) は, (i) と, $\text{pr}^{\mathbf{L}_X}$ に付随するホモトピー系列の完全性の帰結です. (iii) は, (ii) で考察された完全系列に付随する Hochschild-Serre スペクトル系列と $\text{pr}^{\mathbf{L}_X}: \mathbf{L}_X \rightarrow X \times X$ に付随する Leray-Serre スペクトル系列の “ $E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0}$ ” の部分を, 事実 (6) や (i) [や $\mathbf{C}^\times$ に関する¹²そ] の同型で結べば, ほとんど形式的に従います. (iv) も, “因子 $\Delta_X \subseteq X \times X$ は因子 $\Delta_{X^{\text{cpt}}} \subseteq X^{\text{cpt}} \times X^{\text{cpt}}$ から生じる” という事実, “因子 $\Delta_{X^{\text{cpt}}} \subseteq X^{\text{cpt}} \times X^{\text{cpt}}$ は恒等写像 $\text{id}_{X^{\text{cpt}}}$ のグラフである” という事実, 及び, “カップ積 $H^1(\pi_1(X^{\text{cpt}}), \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} H^1(\pi_1(X^{\text{cpt}}), \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\pi_1(X^{\text{cpt}}), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ が Poincaré 双対射に他ならない¹³” という事実から, ほとんど形式的に従います.

最後に, 以下の補題を確認しましょう:

補題 3.2.

(i) 自然な単射 $O_{X \times X} \hookrightarrow O_{X \times X}(\Delta_X)$ が定める直線束 $O_{X \times X}(\Delta_X)$ の大域セクションを $s \in \Gamma(X \times X, O_{X \times X}(\Delta_X))$ としたとき, s の制限として得られるセクション $s|_{X_2}: X_2 \rightarrow \mathbf{L}_X$ によって誘導される基本群の間の準同型射

$$\pi_1(X_2) \xrightarrow{\pi_1(s|_{X_2})} \pi_1(\mathbf{L}_X)$$

は全射.

(ii) (i) で得られた $\pi_1(X_2)$ の商 $\pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{L}_X)$ は, 商 $(\text{pr}_1^X, \text{pr}_2^X): \pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ [この節の最初の方の議論を参照] の中間商. つまり,

$$\pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{L}_X) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X).$$

(iii) $(\text{pr}_1^X, \text{pr}_2^X): \pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ の中間商 $\pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{L}_X) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ [(i), (ii) を参照] は, $(\text{pr}_1^X, \text{pr}_2^X): \pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ の中間商 Q であって, 以下の [純粋に群論的な!] 性質を満たす最大のもの: $\text{Ker}(Q \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X))$ が Q の中心 $Z(Q)$ に含まれる. [特に, この核はアーベル.]

(i) は, 事実 (10) の完全系列と補題 3.1, (ii), の完全系列を用いると, 大域セクション $s \in \Gamma(X \times X, O_{X \times X}(\Delta_X))$ の $\Delta_X \subseteq X \times X$ の近傍での局所的な振る舞いを計算することで確認できます. (ii) は, セクション $s|_{X_2}: X_2 \rightarrow \mathbf{L}_X$ が $X \times X$ 上の射であることの帰結です. また, (iii) ですが, 再び事実 (10) の完全系列と補題 3.1, (ii), の完全系列を用いると, “ $x \in X$ に対して, 全射 $\pi_1(X \setminus \{x\}) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ の核は, x の近傍を 1 周するループに対応する $\pi_1(X \setminus \{x\})$ の元で生成される $\pi_1(X \setminus \{x\})$ の正規部分群” というよく知られた事実から確認することができます.

以上の準備のもと, 定理 2.1 の証明を与えます:

定理 2.1 の証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) は簡単ですので, (ii) $\Rightarrow$ (i) を証明します. $(g_X, r_X), (g_Y, r_Y)$ をそれぞれ X, Y の型とします. 条件 (ii) によって, それぞれ $i \in \{1, 2\}$ に対して, 同型射

$$\alpha_i: \pi_1(X) \xleftarrow{\sim} \pi_1(X_2) / \text{Ker}(\pi_1(\text{pr}_i^X)) \xrightarrow{\alpha \text{ による同型射}} \pi_1(Y_2) / \text{Ker}(\pi_1(\text{pr}_i^Y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$$

¹² $\mathbf{C}^\times$ [の下部位相空間] は $(0, 2)$ 型代数的位相曲面なので, 事実 (4) によって $K(\pi, 1)$ 空間です.

¹³ 厳密には, 同型 $H^2(\pi_1(X^{\text{cpt}}), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ の選択の不定性により, “ ± 1 倍を除いて” です.

が得られます。従って、 X か Y のいずれかがコンパクトであるならば [つまり, $0 \in \{r_X, r_Y\}$], 定理 1.1 によって (i) が導かれます。これにより, 以降は X と Y のいずれもコンパクトではない [つまり, $0 \notin \{r_X, r_Y\}$] とします。

上で定義した α_1, α_2 の定義から, 以下の図式は可換となります:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_2) & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \pi_1(Y_2) \\ (\text{pr}_1^X, \text{pr}_2^X) \downarrow & & \downarrow (\text{pr}_1^Y, \text{pr}_2^Y) \\ \pi_1(X) \times \pi_1(X) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_1 \times \alpha_2} & \pi_1(Y) \times \pi_1(Y). \end{array}$$

従って, 補題 3.2, (iii), で得られた “中間商 $\pi_1(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbf{L}_X) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(X)$ の純粋に群論的な特徴付け” によって, 上の可換図式から以下の可換図式を得ます:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbf{L}_X) & \xrightarrow[\sim]{\exists \alpha \text{ による同型射}} & \pi_1(\mathbf{L}_Y) \\ \pi_1(\text{pr}^{\mathbf{L}_X}) \downarrow & & \downarrow \pi_1(\text{pr}^{\mathbf{L}_Y}) \\ \pi_1(X) \times \pi_1(X) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_1 \times \alpha_2} & \pi_1(Y) \times \pi_1(Y). \end{array}$$

この図式と補題 3.1, (iii), によって, $\alpha_1 \times \alpha_2$ が定めるコホモロジー群の間の同型射 $H^2(\pi_1(Y) \times \pi_1(Y), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\pi_1(X) \times \pi_1(X), \mathbf{Z})$ は, $c_1(\Delta_Y)$ を $c_1(\Delta_X)$ に, ± 1 倍を除いて, 送ることがわかります。ですので, X, Y の滑らかなコンパクト化をそれぞれ $X^{\text{cpt}}, Y^{\text{cpt}}$ と書けば, 補題 3.1, (iv), によって, [コホモロジー群の Künneth 分解を考えて $c_1(\Delta_Y), c_1(\Delta_X)$ の $(1, 1)$ 部分を考えることにより] α_1 と α_2 は $X^{\text{cpt}}, Y^{\text{cpt}}$ の Poincaré 双対と, ± 1 倍を除いて, 適合的である, つまり, 図式

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(X)^{\text{ab}} & \longrightarrow & \pi_1(X^{\text{cpt}})^{\text{ab}} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X^{\text{cpt}})^{\text{ab}}, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(X)^{\text{ab}}, \mathbf{Z}) \\ \alpha_1 \text{ による同型射 } \downarrow \wr & & & & & & \uparrow \wr \alpha_2 \text{ による同型射} \\ \pi_1(Y)^{\text{ab}} & \longrightarrow & \pi_1(Y^{\text{cpt}})^{\text{ab}} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(Y^{\text{cpt}})^{\text{ab}}, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_1(Y)^{\text{ab}}, \mathbf{Z}) \end{array}$$

[ここで, 水平列は補題 3.1, (iv), の最後のディスプレイと同様のもの] が, ± 1 倍を除いて, 可換であることがわかります。特に,

$$2g_X = \text{rank}_{\mathbf{Z}}(\text{上の水平列の合成の像}) = \text{rank}_{\mathbf{Z}}(\text{下の水平列の合成の像}) = 2g_Y$$

が得られますので, $g_X = g_Y$ となります。一方, 命題 1.3 から, $2g_X + r_X - 1 = 2g_Y + r_Y - 1$ を知っているしますので, $(g_X, r_X) = (g_Y, r_Y)$ が導かれ, 事実 (1) によって, X と Y が同相であることがわかります。□

参考文献

- [HM] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists, *Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry*, 659–811, Adv. Stud. Pure Math., **63**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012.
- [MT] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), 75–131.