2019年度 数学演習**IV** 問題1

September 24, 2019

★ ε-δ 論法に関する問題.

$\boxed{1}$ 次の問と合わせて、関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が多項式関数 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ であるとき、f が連続であることを証明したい。
次の写像が連続であることを ε-δ 論法で示せ。

(1) 対角写像 $\mathrm{diag}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto (x, \dots, x)$

(2) 和を取る写像 $\mathrm{plus}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i$

(3) 各成分を別々に定数倍する写像 $m_{(a_0,\dots,a_n)}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, \dots, t_n) \mapsto (a_0 t_0, \dots, a_n t_n)$

(4) べき乗する写像 $p_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^m$

$\boxed{2}$ 先の問と合わせて、関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が多項式関数 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ であるとき、f が連続であることを証明したい。

(1) 各 i に対し、$g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であるとする。$g_0 \times \cdots \times g_n\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を $(t_0, \dots, t_n) \mapsto (g_0(t_0), \dots, g_n(t_n))$ で定める。$g_0 \times \cdots \times g_n$ が連続であることを ε-δ 論法で示せ。

(2) l, m, n を自然数とする。$g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ と $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が連続写像である時、合成写像 $h \circ g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ が連続であることを ε-δ 論法で示せ。

(3) 多項式関数 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ を上で挙げられた連続写像たちを組み合わせて表わせ。

★ 位相空間に関する問題

$\boxed{3}$ 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ の部分集合族 $\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{C} \mid \mathbb{C} \setminus U$ が有限集合 $\} \cup \{\emptyset\}$ を考える。

(1) $\mathcal{O}$ が $\mathbb{C}$ の位相であることを示せ。

(2) 上記の位相 $\mathcal{O}$ に対し、$\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}$ 内での閉包を求めよ。

(3) 写像 $f\colon (\mathbb{C}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{O})$ を $f(z) = z^2$ で定める。f が連続であることを示せ。

$\boxed{4}$ 上記の位相空間 $(\mathbb{C}, \mathcal{O})$ に関して

(1) $(\mathbb{C}, \mathcal{O})$ がコンパクトであるか調べよ。

(2) $\mathbb{Z}$ が $(\mathbb{C}, \mathcal{O})$ 内で連結であるか調べよ。