2019年度 数学演習**IV** 問題10

December 24, 2019

$\boxed{1}$ Aを単位元を持つ可換環とし、$I,\ J_1,\ J_2$をAのidealとする。このとき、$I \subseteq J_1 \cup J_2$ならば、$I \subseteq J_1$または$I \subseteq J_2$が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ kを体とし、$f(x) \in k[x]$を0でない多項式とする。このとき、$a \in K$が$f(a) = 0$を満たせば、$f(x) = (x-a)g(x)$となる$g(x) \in k[x]$が存在することを示せ。

$\boxed{3}$ （アイゼンシュタインの既約性判定法）$n \geq 1,\ c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$とし、$h(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$と置く。素数$p$が存在して、$p|c_i\ (i = 0, \ldots, n-1)$であり、$c_n$は$p$の倍数ではなく。$c_0$は$p^2$の倍数ではないとする。このとき、$h(x)$は$\mathbb{Q}[x]$の既約多項式であることを示せ。

$\boxed{4}$ pは素数とする。

(i) $n \geq 1$とする。$x^n - p$は$\mathbb{Q}[x]$の既約多項式であることを示せ。

(ii) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$は$\mathbb{Q}[x]$の既約多項式であることを示せ。

$\boxed{5}$ Aを可換環とし、aをAの冪零元とする。このとき、$1 + a$はAの単元であることを示せ。