

## 2019年度 数学演習IV 問題2

October 1, 2019

1  $A, B, C$  を集合とするとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

2  $n$  を任意の自然数とし、 $\mathbb{N}$  を自然数の集合とし、 $\mathbb{Z}$  を整数の集合とする。 $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{Z}^n$  への全単射が存在することを示せ。

3  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  で次の性質をもつものを其々 1 つ挙げよ。

(a)  $f$  は単射でも全射でもない。

(b)  $f$  は単射であるが、全射ではない。

(c)  $f$  は全射である。

4 複素数を成分とする  $n$  次正方形全体を  $M_n(\mathbb{C})$  とおく。 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  に対し、関係  $A \sim B$  というのを、正則な  $n$  次複素数正方行列  $P$  が存在して、 $B = P^{-1}AP$  となるときに定める。

(a) 関係  $\sim$  は  $M_n(\mathbb{C})$  の同値関係を定めることを示せ。

(b) 行列の標準化は、 $A$  の  $\sim$  に関する同値類の代表元としてどのようなものがとれることを述べているか？特に、商集合  $M_n(\mathbb{C})/\sim$  は有限集合か？

5  $\mathbb{R}$  を実数全体の集合とする。演算  $\oplus$  を

$$x \oplus y := \min\{x, y\}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

として定める。このとき、演算  $\oplus$  は、結合則

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

と交換則

$$x \oplus y = y \oplus x$$

を満たすことを示せ。演算  $\oplus$  に関する単位元は存在しないことを示せ。