2019年度 数学演習**IV** 問題3

October 8, 2019

★ 集合論に関する問題

$\boxed{1}$ 単射である写像 $f\colon (0,1)^2 \to (0,1)$ の例を作れ。ここで $(0,1)$ は開区間（$\subset \mathbb{R}$）を表している。（簡単なアイデアで作れるが、10 進法表記の罠に注意。）

★ 微積分学に関する問題

$\boxed{2}$ 関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について、f は C^m 級、g は C^n 級とする。$r = \min\{m, n\}$ とするとき、合成関数 $g \circ f$ が C^r 級であることを示せ。

$\boxed{3}$ 次を満たす連続写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の例を 1 つ作れ。f は微分可能だが、C^1 級ではない（つまり、f' は連続でない）。一般に、n 回微分可能であるが、C^n 級でないような関数は存在するか？

$\boxed{4}$ $M_2(\mathbb{C})$ を複素数係数の 2 次正方行列全体のなす集合とする。写像 $\exp\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ を

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

で定めたい。

(1) この極限は A に依らずにいつでも存在するか？

(2) （極限が存在する A については）$\exp(A) \in GL_2(\mathbb{C})$ であることを示せ。

★ 距離空間についての問題

$\boxed{5}$ (X, d) を距離空間とする。関数 $d_{\frac{1}{2}}\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$d_{\frac{1}{2}}(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$$

で定める時、$d_{\frac{1}{2}}$ が X 上の新たな距離であることを示せ。

$\boxed{6}$ (X, d) を距離空間とする。$X^I = \{f\colon [0,1] \to X \mid f \text{ は連続}\}$ とする。X^I 上の非自明な距離 δ を 1 つ作れ。ここで自明な距離とは離散位相を与える距離とする。

★ 位相空間についての問題

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}$ の通常の位相を忘れて、単なる実数全体の集合として考える。集合の間の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \{a,b,c,d\}$ を

$$f(x) = \begin{cases} a & (-1 \leq x \leq 1) \\ b & (x < -1 \text{ or } 1 < x \leq 2) \\ c & (3 \leq x < 4) \\ d & (2 < x < 3 \text{ or } 4 \leq x) \end{cases}$$

で定める。ここで、$\{a,b,c,d\}$ に位相 $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ を与える。f が連続となるような最弱の位相 $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ に入れよ。（このときの位相 $\mathcal{O}$ は有限個の元からなるので、開集合となる部分集合を全て列挙せよ。）

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}$ の位相として、通常とは違う、次で定める位相 $\mathcal{O}'$ を考える。$\mathcal{O}'$ は全ての右半開区間のなす部分集合族 $\{[a,b) \mid a < b\}$ を含む最弱の位相とする。$\mathbb{R}$ の通常の位相を $\mathcal{O}$ と書くことにする。

(1) $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ より強い位相であることを示せ。

(2) 次の 2 条件を満たす写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の例を 1 つ作れ。

- $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{O}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ は連続である。
- $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ は連続でない。

（定義域の位相が強いほど、連続性の定義の条件は達成しやすくなるのであった。）

$\boxed{9}$ コンパクト位相空間 X, Y の積空間 $X \times Y$（つまり位相は積位相が入っている）を考える。積空間 $X \times Y$ がコンパクトであることを示せ。