

2019年度 数学演習IV 問題4

October 15, 2019

- 1 $\mathbb{Z}_{>0}$ を正の整数の集合とする。 $\forall x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して関係 \sim を次のように定義する：

$$x \sim y \Leftrightarrow y \text{ は } x \text{ の倍数である}$$

このとき、 \sim は同値関係であるかどうかを調べよ。

- 2 n を正の自然数とする。集合 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上に関係 \sim を

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; w = cv$$

で定義する。

(i) \sim は同値関係であることを示せ。

(ii) この同値関係の完全代表系を1つ与えよ。

(ちなみにこの同値関係で割った商集合 $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ を $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ または $\mathbb{R}P^n$ と書く。)

- 3 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の上に関係 \sim を

$$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; (w_1, w_2) = c(z_1, z_2)$$

と定義する。

(i) \sim は同値関係であることを示せ。

(ii) $\forall (z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して、 $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ ならば、 $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \sim (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ が成立することを示せ。

- 4 M を空ではない集合とし、 $P(M)$ を M の部分集合全体のなす集合とする。 $P(M)$ 上に演算 $*$ を

$$A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

と定義する。このとき、 $(P(M), *)$ は群であることを示せ。

- 5 G を群とし、 H, K を G の部分群とする。 $H \neq G$ かつ $K \neq G$ であることを仮定する。このとき、 $H \cup K \neq G$ が成り立つことを示せ。

- 6 G を群とする。このとき、

$$G \text{ は Abel 群} \Leftrightarrow \forall a, b \in G, (ab)^2 = a^2b^2 \text{ が成り立つ}$$

を示せ。