2019年度 数学演習IV 問題5

November 5, 2019

★ 微積分学に関する問題

$\boxed{1}$ 有理数全体の集合から実数全体の集合を構成するために次を考える。有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とし、$\mathbb{Q}$ のコーシー列全体のなす集合を X とする。X 上の関係 $\sim$ を次で定める。

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

(1) $\sim$ が同値関係であることを示せ。

(2) 商集合 $X/\sim$ を R と書く。R に次の 2 条件を満たす全順序を入れよ。

- R の部分集合 A が上に有界であれば、A の上限が存在する（下限についても同様)。
- 自然な単射 $\mathbb{Q} \to R$（つまり $q \mapsto [q, q, q, \ldots]$）は順序を保つ。

★ 距離空間に関する問題

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2$ 上に描かれた三角形全体の集合を T とし、T 上の同値関係を次で定める。

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ と } B \text{ は合同な三角形}$$

言い換えれば、$A = f(B)$ となる等長変換 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在するときに同値であるとする。$M = T/\sim$ とおいて $M \times M$ 上の関数 d を次で定めたい。

$$d([A],[B]) = \inf_{f\colon \text{等長変換}} |(A \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus A)|$$

ここで、絶対値の記号は図形の面積を表すとする。

(1) d が代表元の取り方に依らずに定まっていることを示せ。

(2) d が M 上の距離となることを示せ。

★ 位相空間に関する問題

位相空間 X と集合 Y および写像 $p\colon X \to Y$ があると、p が連続になる最強の位相 $\mathcal{O}_p$ を Y に入れることができる。結局は同じことだが、別の書き方をすると、

$$U \subset Y \text{ が開集合} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ が開集合}$$

として、Y の位相 $\mathcal{O}_p$ を定めることができる。$\mathcal{O}_p$ を p が誘導する商位相という。

特に、位相空間 X 上に同値関係 $\sim$ があると、自然な射影 $X \to X/\sim$（つまり $x \mapsto [x]$）が誘導する商位相を $X/\sim$ に入れることができる。この位相が入っている $X/\sim$ を商空間という。

$\boxed{3}$ 2 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^2$ には $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ から自然な射影が誘導する商位相が入る。

(1) $\mathbb{R}P^2$ がコンパクトであることを示せ。

(2) $\mathbb{R}P^2$ がハウスドルフであることを示せ。

$\boxed{4}$ 位相空間 X 上の同値関係 $\sim$ が与えられたとする。自然な射影 $p\colon X \to X/{\sim}$ により、$X/{\sim}$ に商位相を入れる。Y を位相空間、$g\colon X/{\sim} \to Y$ を写像とし、$f\colon X \to Y$ を $f = g \circ p$ で定める。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & X/{\sim} \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

このとき、

$$f \text{ が連続} \Leftrightarrow g \text{ が連続}$$

を示せ。

$\boxed{5}$ ハウスドルフ空間 X と X 上の同値関係 $\sim$ で、商空間 $X/{\sim}$ がハウスドルフでないような例を作れ。

★ 群作用に関する問題

群 G の集合 X への（左）作用（あるいは X 上の（左）G-作用とも言う）とは、写像 $G \times X \to X$（この写像による (g, x) の像を $g \cdot x$ と書く）であって

- $e \cdot x = x$（e は群 G の単位元を表す）
- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

を満たすものを言う。

$\boxed{6}$ S^1 を絶対値 1 をもつ複素数全体の集合とみなす。このとき、S^1 は積により群をなす。n を自然数とする。S^{2n-1} 上の自由な S^1-作用を作れ。（X 上の（左）G-作用が自由であるとは、$g, h \in G$ に対し、$g \cdot x = h \cdot x$ となる点 $x \in X$ が存在すれば $g = h$ となることである。）

$\boxed{7}$ $M_2(\mathbb{R})$ で実係数 2 次正方行列全体のなす集合を表し、$\mathbb{R}^4$ と同一視する。$M_2(\mathbb{R})$ の点 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、随伴作用で得られる $M_2(\mathbb{R})$ 内の径数付き C^∞ 級曲線

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

を考える。$t = 0$ における速度 $\dot{c}(t)$ を計算せよ。

ちなみに $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群をなしており、$\left\{ \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$ と書ける。

このように $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$ と書ける部分群は 1 パラメータ部分群とよばれる。

$\boxed{8}$ $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset SO(2)$ となるための $A \in M_2(\mathbb{R})$ の必要十分条件を求めよ。