

## 2019年度 数学演習IV 問題6

November 11, 2019

- 1  $G$  は群で、 $H, K, N$  を  $G$  の部分群とする。また、 $K$  は  $H$  の部分群であることを仮定する。このとき、

$$H \cap (KN) = K(H \cap N)$$

を示せ。

- 2  $G$  は群で、 $H, K$  を  $G$  の部分群とする。 $(\#H, \#K) = 1$  (つまり、最大公約数が1) であることを仮定するとき、 $H \cap K = \{e\}$  であることを示せ。

- 3  $N = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  は4次対称群  $S_4$  の正規部分群であることを示せ。

- 4  $G = \langle a \rangle$  を巡回群とする。 $G$  は有限群であると仮定し、 $G$  の位数を  $n$  とおく。 $n$  の約数  $d > 0$  をとり、 $m = n/d$  とおく。

(i)  $H = \langle a^d \rangle$  とおく。このとき、 $H$  は  $G$  の部分群で、 $\#H = m$  であることを示せ。

(ii)  $H'$  は  $G$  の部分群で、 $\#H' = m$  とする。このとき、 $H = H'$  を示せ。

- 5  $S_4$  を4次対称群とし、 $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}$  とする。

(i)  $H$  は  $S_4$  の部分群であることを示せ。更に、 $H$  は  $S_3$  と群の同型であることを示せ。

(ii)  $S_4$  の  $H$  に関する左剰余類分解を求めよ。

- 6  $\mathbb{R}$  は加法を演算とする群とする。また、 $GL_2(\mathbb{R})$  は正則な2次の実正方行列全体が行列の乗法を演算としてなす群とする。

(i)  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $x \mapsto 2x$  は群の準同形写像か？

(ii)  $f_2 : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ 、 $X \mapsto X^2$  は群の準同形写像か？

- 7  $p, q$  を素数とし、 $G$  を位数  $pq$  である Abel 群とする。このとき、 $G$  が巡回群であることを示せ。