2019年度 数学演習IV 問題8

December 9, 2019

$\boxed{1}$ G を有限群とし、$f : G \to G$ を準同型写像とする。f が全射であることを仮定する。このとき、f が同型写像であることを示せ。

$\boxed{2}$ G を群とし、$Z(G) := \{a \in G \mid \forall\, b \in G,\ ab = ba\}$ とする。

(i) $Z(G)$ が正規部分群であることを示せ。

(ii) $G/Z(G)$ が巡回群であることを仮定する。このとき、G が Abel 群であることを示せ。

$\boxed{3}$ G は群で、$\mathrm{Aut}(G)$ を G の全ての自己同型のなす集合とする。

(i) $\mathrm{Aut}(G)$ が群であることを示せ。

(ii) $\mathrm{Aut}(G)$ が巡回群であることを仮定する。このとき、G が Abel 群であることを示せ。(**ヒント：** 準同型写像 $G \to \mathrm{Aut}(G)$, $a \mapsto \phi_a$ を考える。ここは、$\forall\, b \in G,\ \phi_a(b) = aba^{-1}$)

$\boxed{4}$ G は群で、N を G の正規部分群とする。G/N と N が有限生成群であることを仮定する（即ち、有限個の元で生成される）。このとき、G が有限生成群であることを示せ。