模擬試験 I

1. (1)
$1 = 0\times 11 + 1 \Rightarrow a_1 = 1$
$2 = 0\times 11 + 2 \Rightarrow a_2 = 2$
$\vdots \qquad\qquad \vdots$
$9 = 0\times 11 + 9 \Rightarrow a_9 = 9$
$10 = 0\times 11 + 10 \Rightarrow a_{10} = 10$
$11 = 1\times 11 + 0 \Rightarrow a_{11} = 11$
$12 = 1\times 11 + 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
$\vdots$

$a_9 = 9$

(2) $a_1 + \cdots + a_{99} + a_{100} = (1+2+3+\cdots+10+0)\times 9 + a_{100}$
$= 55\times 9 + 1 = 496$

2. (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 7^i$ 等比数列の和の公式を用いて

$$= \frac{7\cdot(7^n-1)}{7-1} = \frac{7}{6}(7^n-1)$$

(2) $$\sum_{i=1}^{200} \frac{3}{i(i+1)} = 3\sum_{i=1}^{200} \frac{1}{i(i+1)} = 3\sum_{i=1}^{200}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= 3\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{200}-\frac{1}{201}\right)\right)$$

$$= 3\left(1 - \frac{1}{201}\right) = \frac{600}{201}$$

3. $(a^x)' = (\log a)\cdot a^x \quad (\sin x)' = \cos x \quad (x^n)' = nx^{n-1}$

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\,g'(x)$

⇒ (1) $y = 5^x(x^2+x+1)$

$y' = (5^x)'(x^2+x+1) + (5^x)((x^2+x+1)')$

$= (\log 5)5^x(x^2+x+1) + 5^x(2x+1)$

(2) $y = \sin x \cdot x^2$

$y' = (\sin x)'\cdot x^2 + \sin x \cdot (x^2)'$

$= \cos x \cdot x^2 + \sin x \cdot 2x$

4. (1) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ または $x = -\frac{1}{3}$

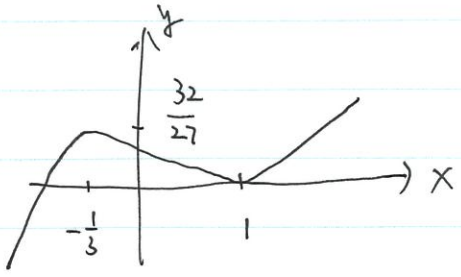
$x < -\frac{1}{3}$ のとき, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3}$ のとき単調に増加

$-\frac{1}{3} < x < 1$ のとき, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$ のとき, 単調減少

$1 < x$ のとき, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 1 < x$ のとき単調に増加.

⇒ $0 = f(1)$ は極小, $f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$ は極大

⇒



(2)　半径：r　　高さ：h

直円柱の体積は $V=\pi r^2 h$ なので，

$h+r=3 \Leftrightarrow h=3-r$ を $V=\pi r^2 h$ に代入する．

$V=\pi r^2(3-r)=3\pi r^2-\pi r^3$

$V'=6\pi r-3\pi r^2=r(6\pi-3\pi r)$

$V'=0 \Rightarrow r=0$ または $r=2$

$r=0$ のとき，円柱が存在しないので，$r=2$ となる．

つまり，$r=2$ のとき，V は極大

$V=3\pi\cdot 4-\pi\cdot 8=4\pi$