被覆型輪番割当と密度十分条件

〇河村彰星　小林佑輔　（京大）

スケジューリング・シンポジウム
令和7年9月16日

↑本スライド・資料を置いてあります

科研費
KAKENHI
JP24K02901
京都大学【いしずえ】

以下 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ とする

輪番割当問題 (詰込型) (pinwheel scheduling) [HMRTV89]

各仕事 $i = 1, 2, \ldots, k$ は**どの連続する a_i 日にも一度以上**やる必要がある
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けることができるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ は (詰込) **割当可能**であるという

例

日数 →

$(2, 4, 4)$ 割当可能 ・・・ 2 4 2 4 | 2 4 2 4 | 2 4 2 4 | 2 4 2 4 ・・・

$(2, 3, 4)$ 割当不可能 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ なので

$(2, 3, 80)$ 割当不可能 ・・・ 2 3 2 ・・・

$(3, 4, 5, 8)$ 割当可能 ・・・ 6 4 5 6 8 4 6 5 | 6 4 5 6 8 4 6 5 ・・・
甲 乙 甲 乙 甲 乙

$(3, 4, 6, 8)$ 割当可能

単調性 割当可能な組の或る数を
より大きい数に変えても割当可能

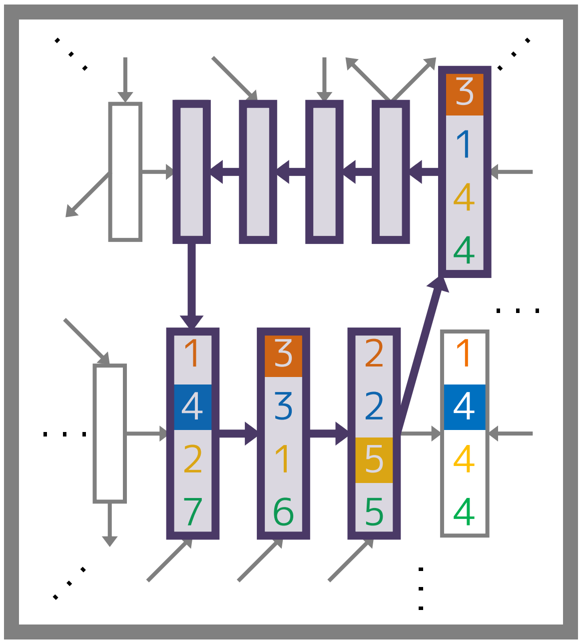
$(4, 5, 6, 6, 8)$ 割当可能
甲 乙

分割性 割当可能な組の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能
(一般に N 倍の数 N 個)

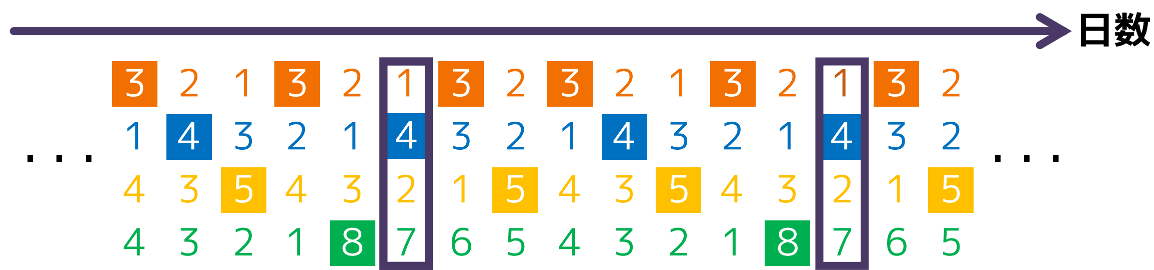
[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.

与えられた組が割当可能か判定するには？

状態遷移図を作り　閉路があるか調べればよい



$(3, 4, 5, 8)$ の
状態遷移図
(頂点数 $\le 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8$)



状態
各仕事を「あと何日以内に
やらねばならないか」を表す

これにより割当可能性は PSPACE で判定できる

NP に属するか未解決

NP 困難かも未解決

定義

組 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の**密度** (density) とは $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$

A が割当可能であるには明らかに $\mathrm{D}(A) \leq 1$ が必要
これは一般には十分条件でないが……

$\frac{1}{2}$ よりも大きな数で成立つか？

定理 [HMRTV89]

A の各数が前の数の倍数で
かつ $\mathrm{D}(A) \leq 1$ ならば　A は割当可能

∵ 仕事が一種類の場合に帰着される

例 $(4,8,8,16,16)$ は割当可能 $\xleftarrow{\text{分割性}}$ $(4,8,8,8)$ 割当可能 $\xleftarrow{\text{分割性}}$ $(4,4,4)$ 割当可能

定理 [HRTV92]

A に現れる数が二種類以内で
かつ $\mathrm{D}(A) \leq 1$ ならば　A は割当可能

系 [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

∵ 各項を 2 冪に切捨てても密度 ≤ 1

例 $(6,12,13,24,25)$ 割当可能 $\xleftarrow{\text{単調性}}$ $(4,8,8,16,16)$ 割当可能

うまく使うと切捨て時の無駄を
小さくできる (次頁の [CC93, CC92])

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲) [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

$(= 0.5)$

定理 [CC93]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{2}{3}$ ならば A は割当可能

$(= 0.666\ldots)$

定理 [CC92]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{7}{10}$ ならば A は割当可能

$(= 0.7)$

定理 [FL02]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{3}{4}$ ならば A は割当可能

$(= 0.75)$

定理 [Kaw24]

~~予想~~ [CC93]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なら A は割当可能

$(= 0.833\ldots)$

$(2, 3, \bullet)$ が割当不可能なのでこれが最良

証明手法

- 計算機で有限個 (数千万個) の組の割当可能性を確認
- 密度 $\le \frac{5}{6}$ の任意の組が　これら有限個の組から **単調性** **分割性** で作れることを証明

[CC92] M.Y. Chan, F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. IEEE Transactions on Computers 41, 755–768, 1992.

[CC93] M.Y. Chan, F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. Algorithmica 9, 425–462, 1993.

[FL02] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias. Pinwheel scheduling: achievable densities. Algorithmica 34, 14–38, 2002.

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.

[Kaw24] A. Kawamura. Proof of the density threshold conjecture for pinwheel scheduling. In Proc. 56th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 1816–1819, 2024.

「詰込」でなく「被覆」

輪番割当問題 (被覆型) (point patrolling) [KS20]

各人 $i = 1, 2, \dots, k$ は **連続する a_i 日に一度以下** しか働けない
これを満しながら毎日だれか一人づつを働かすことはできるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は (被覆) **割当可能**であるという

例

$(2, 4, 4)$ 割当可能 ・・・ 2 4 2 4 | 2 4 2 4 | 2 4 2 4 | 2 4 2 4 ・・・

$(2, 4, 5)$ 割当不可能 $\left(\because \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1 \text{ なので} \right)$

$(2, 3, 4)$ 割当可能

$(2, 3)$ 割当不可能 (4 日間さえも)

$(2, 3, 5)$ 割当不可能 (8 日間さえも)

$(2, 3, 5, 9)$ 割当不可能 (16 日間さえも)

$\vdots$

$(2, 3, 5, 9, \dots, 2^n + 1)$ 割当不可能

単調性 割当可能な入力の或る数を
より**小さい**数に変えても割当可能

分割性 割当可能な入力の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能

割当可能性は先程と同様に状態グラフを考えることで **PSPACE** で判定できるが
(先程とは違って) **NP** 困難と判っている [KKK25]

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.
[KKK25] A. Kawamura, Y. Kobayashi and Y. Kusano. Pinwheel covering. In Proc. 14th International Conference on Algorithms and Complexity (CIAC), Part II, LNCS 15680, 185–199, 2025.

先程とは逆に　$\mathrm{D}(A) \geq 1$ が明らかに必要　また

2 よりも小さな数で成立つか？

定理

A の各数が前の数の倍数で
かつ $\mathrm{D}(A) \geq 1$ ならば　A は割当可能

系

$\mathrm{D}(A) \geq 2$ ならば A は割当可能

定理 (本発表)

$\mathrm{D}(A) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots$ ならば A は割当可能
$(= 1.264 \ldots)$

前頁の割当不可能な例
により　これが最良

証明手法

- 計算機で有限個 (数千万個) の組の割当可能性を確認
- 密度 $\geq 1.264 \ldots$ の任意の組が
  これら有限個の組から
  単調性 **分割性** **2の挿入** で
  作れることを証明 ↑NEW!

単調性 割当可能な入力の或る数を
より**小さい**数に変えても割当可能

分割性 割当可能な入力の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能

2の挿入 割当可能な組の各数を 2 倍にして
「2」を加えても割当可能

$(3, 3, 5, 5)$ 割当可能 ・・・ 5 3 3 5 3 5 3 3 5 3 5 3 3 5 ・・・

$(2, 6, 6, 10, 10)$ 割当可能 ・・・ 2 10 2 6 2 6 2 10 2 6 2 10 2 6 2 6 2 10 2 6 2 10 2 6 2 6 2 10 ・・・

今後の課題

密度による十分条件の証明について

- 計算機に頼らない証明が欲しい
- より特殊な場合や一般的な場合には？（入力にあまり小さい数が現れないなど）

一般的ないし応用寄りの問題設定

- これまでに扱ったのは理論的に最も単純な場合のみ　➡より一般的な場合には？
- 仕事・人員の両方が複数ある　仕事によって所要時間が異なる
  仕事間に距離がある　頻度条件を破る度合によりコストがかかる　など