被覆型輪番割当の密度十分条件
The Optimal Density Bound for Pinwheel Covering

○ 河村 彰星 [1]
京都大学

小林 佑輔 [2]
京都大学

[1]Akitoshi Kawamura
Kyoto University
kawamura@kurims.kyoto-u.ac.jp

[2]Yusuke Kobayashi
Kyoto University
yusuke@kurims.kyoto-u.ac.jp

Abstract In the covering version of the pinwheel scheduling problem, a daily task must be assigned to agents under the constraint that agent i can perform the task at most once in any a_i-day interval. We determine the optimal constant $\alpha^* = 1.264\ldots$ such that every instance with $\sum_i \frac{1}{a_i} \geq \alpha^*$ is always schedulable. This resolves an open problem posed by Kawamura and Soejima (2020).

1 被覆型輪番割当と密度

日々欠かさず行うべき仕事が一つあり，k 人の部下に分担させたい．各部下 $i \in [k] = \{1, \ldots, k\}$ には**周期**と呼ばれる正整数 a_i が定まっており，どの連続する a_i 日間においても i は高々一度しか仕事を担当できないとする．この制約の下で仕事を毎日ずっと続けることができるだろうか．これが**被覆型の輪番割当**問題である [3]．同じ問題を**点警邏**と呼ぶ文献 [4] もあるが，ここでは**詰込型の輪番割当** [1] との対比を示すこの呼称を用いる．詰込型とは所定の日数の間に仕事を「高々」でなく「少なくとも」一度担当させるとしたものである．

つまり被覆型輪番割当の入力は空でない正整数列 $A = (a_i)_{i \in [k]}$ であり，求めたいのは各 $i \in [k]$ で次の**頻度条件**を満す**日割** $S \colon \mathbb{Z} \to [k]$ である．

任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$|[m, m + a_i) \cap S^{-1}(i)| \leq 1$

但し S^{-1} は S の逆像である．このような S が存在するとき A は**被覆割当可能**（本稿では単に**割当可能**）であるという．例えば $(2, 2)$ や $(2, 4, 8, 8)$ や $(3, 5, 5, 5, 7)$ は割当可能である．割当可能性を判定する多項式時間算法は知られていない．

$A = (a_i)_{i \in [k]}$ が割当可能であるには，A の**密度**

$$D(A) = \sum_{i \in [k]} \frac{1}{a_i}$$

すなわち部下らが提供し得る一日あたりの労働力の総和が, 1 以上であることが明らかに必要である．この条件は十分ではない．例えば $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \geq 1$ だが $(2, 3, 5)$ は割当不可能である．それどころかこの三人の部下では 8 日間を持ち応えることさえできない．実際，周期 5 の部下を 8 日間のうち何日めに割当てても，この部下がいない連続する 4 日間ができてしまい，それを埋めるには周期 2 と 3 の二人では間に合わない．同じ議論を日数を倍々にしながら繰返すと一般に各 k に対して列

$$\hat{B}_k = (2, 3, 5, \ldots, 2^{k-1} + 1)$$

は（2^k 日間さえ）割当不可能と判る [4, Theorem 17]．この列の密度 $D(\hat{B}_k)$ は $k \to \infty$ において

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1} + 1} = 1.264\ldots$$

に収斂する．これがぎりぎりの例である，すなわち密度 α^* 以上の列はみな割当可能であると予想されていた [4, Conjecture 18]．本稿ではこの予想を示す．すなわち

定理 1 正整数からなる周期列 A は，もし $D(A) \geq \alpha^*$ ならば被覆割当可能である．

わざわざ整数と断ったのは，次節で周期を整数とは限らない実数値に拡張するからである．この

拡張は，詰込型に関して定理 1 に似た次の定理 2 を示す際に河村 [2] が用いた手法である．

定理 2（**[2, Theorem 1]**） 正整数からなる周期列 A は，もし $D(A) \le \frac{5}{6}$ ならば詰込割当可能である．

この詰込型のときと同じく，本稿の定理 1 の証明は，後述のように大量の周期列の割当可能性を確かめる計算機実験に頼ったものになっている．人の読める証明を得ることは今後の課題である．

2 定理 1 の証明の概要

先述の通り問題を非整数の周期に拡張する [3]．正実数の列 $A = (a_i)_{i\in[k]}$ が**割当可能**であるとは，日割 $S\colon \mathbb{Z} \to [k]$ が存在して各 $i \in [k]$ で次の頻度条件が成立つことをいう．

> 任意の $m \in \mathbb{Z}$ と $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対して，
> $\bigl|[m, m + \lfloor ra_i \rfloor) \cap S^{-1}(i)\bigr| \le r$

この定義は a_i が整数のとき確かに本稿冒頭のものと一致すること，また周期を減らして割当可能が不可能になることはないという自然な性質が非整数でも成立つことに注意する．定理 1 の証明の鍵となるのが，与えられた周期列の割当可能性をより小さい周期列に帰着させる次の補題である．

補題 3（**[3, Lemma 6]**） $\theta \ge 1$ とする．任意の割当不可能な周期列 A に対し，割当不可能な周期列 B が存在して次を満す．

- B は θ 以下の周期については A と一致する．
- B に現れる周期はみな 2θ 以下である．
- $D(B) \ge D(A) - 1/\theta$.

初めの二条件から，もし A が整数からなり θ も整数ならば，B の各周期は $\{1, 2, \ldots, \theta\} \cup (\theta, 2\theta]$ に属する．そこで定理 1 をいうには次の主張が何らかの $\theta \ge 1$ において成立てばよい．実際，詰込型の定理 2 はこれに相当する議論により示された．

> $\{1, 2, \ldots, \theta\} \cup (\theta, 2\theta]$ の周期からなる列 B は，もし $D(B) \ge \alpha^* - 1/\theta$ ならば割当可能.

しかし残念ながらこれは如何なる $\theta \ge 1$ でも成立たない．反例として先程挙げた $\hat{B}_k$（の k を $2^{k-1}+1 \le \theta$ なる最大の整数としたもの）がある．これを解決する次の補題こそが，詰込型の定理 2 には現れなかった新たな議論だが，証明は別稿に譲る．

補題 4 定理 1 にもし反例があるならば，周期 2 を含まない反例がある．

これにより定理 1 の成立には，上記の主張が B を周期 2 を含まないものに限ったときに（何らかの θ で）成立てばよい．そして実際これは $\theta = 10$ において成立つ．すなわち

> $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup (10, 20]$ の周期からなる列 B は，もし $D(B) \ge \alpha^* - \frac{1}{10}$ ならば割当可能.

このことは計算機で確かめられた．B が非整数を含むのに如何にして調べ尽したかというと，驚くべきことに B の各周期をすべて整数に切上げても尚お割当可能だったのである．すなわち切上げ後の周期列を C と呼ぶと次のことが成立つ．

補題 5 周期列 $C = (c_i)_{i\in[k]}$ が各 $i \in [k]$ で $c_i \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ を満し

$$\sum_{i\in[k]} \begin{cases} \frac{1}{c_i} & (c_i \le 10 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{c_i - 1} & (c_i > 10 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が $\alpha^* - \frac{1}{10}$ 以上ならば，C は割当可能である．

この補題を確かめるには，仮定を満す C のうち成分の追加について極小なものを見ればよい．それは有限個であり計算機で確かめることができた．

参考文献

[1] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, and D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In *Proc. Twenty-Second Annual Hawaii International Conference on System Sciences*, volume 2, 693–702, 1989.

[2] A. Kawamura. Proof of the density threshold conjecture for pinwheel scheduling. In *Proc. of the 56th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (STOC), 1816–1819, 2024.

[3] A. Kawamura, Y. Kobayashi, and Y. Kusano. Pinwheel covering. In *Proc. 14th International Conference on Algorithms and Complexity* (CIAC), Part II, *Lecture Notes in Computer Science* 15680, 185–199, Springer, 2025.

[4] A. Kawamura and M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. *Theoretical Computer Science*, 839:195–206, 2020.

本研究は科研費 JP24K02901 および 2025 年度京都大学【いしずえ】の助成を受けた．