数理解析研究所講究録
第7巻 1965年 3-6

特異積分方程式の数値解法

(除く，固有値問題， Volterra 型等)

群馬大 学芸 物理　阿 曾 義 之

1. はしがき

積分方程式は，第1種 $\int K(s,t)f(t)dt=g(s)$ ，第2種 $f(s)+\int K(s,t)f(t)dt=g(s)$ ，同次 $\int Kfdt=f$ ，または Fredholm 型，Volterra 型等に分類される。積分方程式論で特異積分方程式というと，核 K の自乗積分が発散するものを指すようであるが，数値解法においては単に K が $s=t$ で特異性を持つ場合（積分は収束）でも計算の際にかなりの困難を伴なうので，ここではそのようなものも含めて特異積分方程式とよぶことにする。

積分方程式の教科書を次に掲げる。記号 MR は書評掲載誌 Mathematical Review の略。筆者は以下のもののうちのごく一部分しか見ていない。実際的なものとしては (1) 加藤敏夫，中田義元，橋本英典，藤田宏："微分方程式の近似解法 I" 岩波現代応数講座，(2) 日高孝次"積分方程式" 1941， (3) Bückner, H. F. "Numerical methods for integral equations" in J. Todd, ed., "Survey of numerical analysis" 1962, (MR 24B, 1776)， (4) Bückner, H. F. "Die praktische Behandlung von Integralgleichungen" Ergebnisse der angew. Math. Bd. 1, 1952, (MR 14, p 210)， (5) Hamel, G. "Integralgleichungen, Einführung in Lehre und Gebrauch" 1937， (6) Hildebrand, F. B. "Methods of applied math." 1952, (MR 15, p 204)， (7) Schmeidler, W. "Integralgleichungen mit Anwendungen in Phys. und Technik, 1 Linear Integralgleichungen" Math. und Ihre Anwendungen in Phys. und Technik, Reihe A, Bd 22, 1960, (8) Mikhlin, S. G. "Integral equations and their applications to certain probs. of mechs., mathematical phys. and technology" 1957, (MR23, A490).

純理論的なもの，特殊なものその他としては (9) 吉田耕作"積分方程式論"，1950，(10) Tricomi, F. G. "Integral equation," 1957, (11) Muskhelishvili, N. I. "Singular integral equations," 1953, (MR 8, p586 ; 11, p523)，(12) Noble, B. "Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations," 1958, (MR 21, 1505)，等。

2. 特異積分方程式の解法。

1) 厳密解，解析的方法。

2) 近似解法

(i) 特異核を正規な核に変換する方法。

(参照 教科書 例えば (3)，(5))

(ii) 級数で展開する方法，縮退核で近似する方法。 (参照 教科書。)

(iii) 逐次近似法。

第2種： 教科書参照 例えば (3) (4)。

第1種： 文献は少い。

Berg, L.: Lösungsverfahren für singuläre Integral-gleichuugen, 1. *Math. Nachr.* 14 (1955) 193−212, (MR 19, p66).

(iv) 変分法。

(v) 数値積分公式または補間公式等を使つて連立1次方程式で近似する方法。

イ) Kryloff の解法。 (参照 教科書 (1))

$$K(s,t)=\frac{d}{dt}H(s,t) \quad \text{とすると，} \quad \int Kf\,dt=\int f\,dH \doteqdot \Sigma f(t_n)\triangle H.$$

ロ) 簡便な方法。 (参照 教科書 (1) p31)

ただし $\lim_{t\to s} K(s,t)(t-s)=0$ のとき。

ハ) Nyström の解法。 (参照 教科書 (2))

補間公式を使用。 手数がかかる。

Young, A. The application of approximate product integration to the numerical solution of integral equations. *Proc. Roy. Soc. London* A 224 (1954), (MR 16, p179).

Nyström の方法を実用上便利なように公式化したもの。

阿曾　特異積分方程式の数値解法。群馬大紀要13 (1965).

Young の方式と大同小異。この方法について以下に述べる。

核 $K(s,t)$ を次のように分解。

$$K = \mathcal{K}P + (K - \mathcal{K}P)。$$

$\mathcal{K}P$ は K の特異点 $(s=t)$ 附近を近似する初等関数，すなわち P は適当な多項式，$\mathcal{K}$ は例えば $1/(s-t)$，$\ln|s-t|$ 等，基本的な特異性を持つ関数。あらかじめ数値積分公式 $\int \mathcal{K}(s,t)f(t)dt \fallingdotseq \sum_n w_n(s)f(t_n)$ を作つておく。すると

$$\int Kf\,dt = \int \mathcal{K}Pf\,dt + \int(K - \mathcal{K}P)f\,dt .$$

右辺第1項については上記公式を使用，第2項の被積分関数は regular であるから通常の求積公式を適用する。

$\mathcal{K}P$ の選択に関する注意。特異点近傍で K のよい近似であるばかりでなく，遠く離れた所でも $|K-\mathcal{K}P|$ はあまり大きくないことが必要。さもないと求積公式を適用する際に誤差が大きくなる。

3. 計算失敗例

方程式は

$$\int_{-l}^{l}\left[K_0(y-\eta)F(y)+i\left\{\frac{1}{y-\eta}-K_1(y-\eta)\right\}\overline{F(y)}\right]dy = 4\pi U,$$

ただし F は未知関数，$\overline{F}$ は複素共役，K_0，K_1 は変形ベッセル関数。これは，一様流に垂直におかれた平板のまわりの流れを求める際にであう積分方程式である。(Reynolds 数は $4l$。)

この方程式の解は $y=\pm l$ で $1/\sqrt{l^2-y^2}$ なる特異性を持つので，$y=l\sin t$，$\eta=l\sin\tau$，$f=l\cos t\cdot F$ と変換して扱う。

特異点附近で，$Y = y - \eta$ と書いて，

$$K_0(Y) = \ln|Y|\left(-1-\frac{1}{4}Y^2-\cdots\right)+(\gamma-\ln 2)+\cdots,$$

$$\frac{1}{Y}-K_1(Y) = \ln|Y|\left(-\frac{1}{2}Y-\frac{1}{16}Y^3-\cdots\right)+\cdots。$$

前節末尾の方法を適用した。$K = \ln|t-\tau|$。Pとして上記展開の高次の項までとると，かえつて結果は非常に悪くなる。（$l \geqq 5$のとき）。