数理解析研究所講究録
第7巻 1965年 31-37

自由境界層流における高波数乱れ

京大 理 物理　後　藤　金　英

1．はしがき

異なる二つの平行流の境界に出来る流れを自由境界層流という（図1．）。この論文の目的は，自由境界層流における微小乱れの，安定特性を求める事である。微小な乱れは，normal mode に分解して，取扱うことが出来る。各々のmode は対応する波数をもつ。この波数の大小によつて，高波数乱れ，抵波数乱れと大雑把に分けて考える。

こゝでは，話を簡単にするために，粘性ゼロの極限に議論を限る。低波数の乱れは，波数あるいは増幅因子が小さい事を利用すれば，困難ではあるが，解析的にこれを解くことが出来る。[1] 一方，高波数乱れの増幅因子は，波数と共に限りなく大きくなる。そのため此の場合には，一貫した解析的な取扱いの試みは，殆んど絶望的になる。本論文では，電子計算機による数値解で，この難点を克服することを試みた。

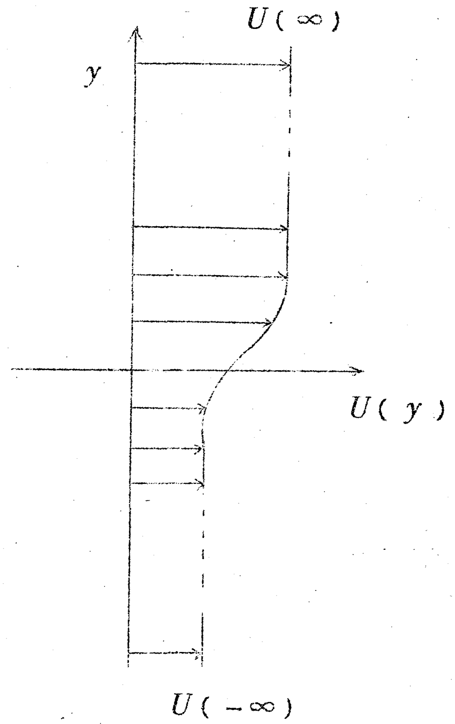

図1.　自由境界層流の速度分布

計算の結果，高波数の乱れは，すべて減衰する。粘性ゼロの極限に於ても，尚減衰する乱れが存在するということは，物理的にみて，極めて興味ある結果である。

2．問題の定式化

流れの方向にx軸，直角にy軸をとる。定常速度分布を$U(y)$で表わす。二次元乱れを(u, v)とする。(u, v)は，乱れの流れ函数ψを用いると，$u=\partial\psi/\partial y$，$v=-\partial\psi/\partial x$と表わされる。Navier−Stokes方程式から圧力を消去し，速度成分 $\left(U+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)$

を代入，ψに関する二次の項を，一次の項に比して省略する。得られた線型方程式に含まれる係数函数は，$U(y)$ から導かれる函数だけである。従つて，ψを **normal mode** に分解し，一つ一つのmode を別個に考える事が出来る。波数α (>0)，複素位相速度c ($=c_r+ic_i$) をもつたmode は

$$\psi=\phi(y)\exp[i\alpha(x-ct)]$$

と表わされる。tは時間。c_i は増幅因子と呼ばれ，$c_i>0$ 或は<0に従い，乱れは時間的に増大，或は減衰する。$c_i=0$ の場合は，乱れは伝播するのみで，増大も減衰もしない。c_r は位相速度である。ψを支配する方程式に，この形を代入すると，ϕを支配する方程式（Orr-Sommerfeld 方程式）

$$(U-c)(D^2-\alpha^2)\phi-(D^2U)\phi=\frac{1}{i\alpha R}(D^2-\alpha^2)^2\phi \qquad (1)$$

が得られる。$D=d/dy$. Rはレイノルズ数。一方，境界条件は，流れが $y=\pm\infty$まで広っているので，

$$y=\pm\infty で \quad u=v=0,$$

即ち，

$$D\phi=\alpha\phi=0 \qquad (2)$$

となる。

さて，こゝでは$\alpha R=\infty$の場合のみに議論を限ることにする。この場合，方程式 (1)， 境界条件 (2)はそれぞれ

$$(U-c)(D^2-\alpha^2)\phi-(D^2U)\phi=0, \qquad (3)$$

$$\alpha\phi=0 \qquad (y=\pm\infty) \qquad (4)$$

となる。$U(y_s)=c$， $D^2U(y_s)\neq 0$ なる点$y=y_s$ は，方程式 (3)の特異点である。$R_e[DU(y_s)]>0$ の場合，この特異点の下側を迂回する領域（図2）で，方程式 (3)の解が，(1) の解の漸近解（$\alpha R\to\infty$の意味で）となる。（例えば文献2参照）。従って，この領域で (3)式を解き，境界条件 (4)をみたす解を求めればよい。その際，(4)が

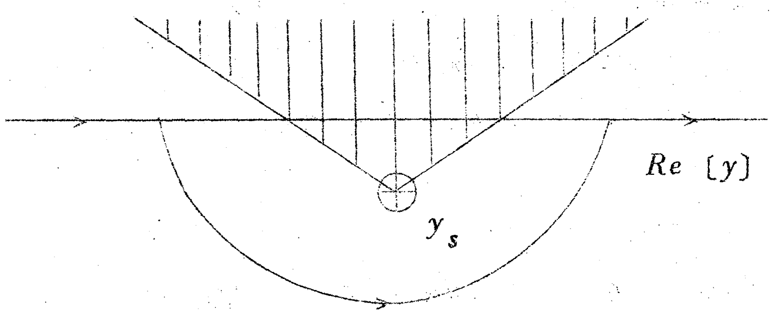

図2. 影をつけない領域で (3) 式の解は有効。

斉次条件なので，(3)に含まれるパラメーターcとαのうち一つを決めると，他は対応する固有値として確定する。安定特性は，c_iによつて決まるから，cとαの関係を求める事が主目的であり，固有函数ϕを実軸上の全ての点で決定する必要はない。結局問題は『(3)式の解が条件(4)をみたすべく，$c=c(\alpha)$なる固有値を求めること』となる。

3．$\alpha R=\infty$，$U=\tanh y$に対する$c(\alpha)$

自由境界層の速度分布として$U=\tanh y$をとる。比較的小さな波数αについては，固有値問題を解析的に取扱うことが出来る。こゝでは，それらの結果だけを引用する。（文献1参照）。

3.1.a　$\alpha \ll 1$　（α－展開による解析）。

$c_r=0$　，

$$c_i \begin{cases} =1-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\alpha-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}-I_1\right)\alpha^2+O(\alpha^3), & (5.a) \\ =-1+\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)\alpha+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\pi+2\pi\log 2-\frac{9}{16}\pi^2-I_1\right)\alpha^2+O(\alpha^3), & \end{cases}$$

$$I_1=2.921. \qquad (5.6)$$

3.1.b　$\alpha \simeq 1$　（c－展開による解析）。

$c_r=0$，

$$\alpha=1-\frac{\pi}{2}c_i+\left(2-\frac{3}{8}\pi^2-I_2\right)c_i^2+O(c_i^3), \qquad (6)$$

$$I_2=-2.331$$

3.2　$\alpha \gg 1$に対する$c(\alpha)$。

$\alpha \gg 1$に対しては，以下に定義される変数変換を行うと，都合がよい。

<u>変換1</u>

$$Z=\tanh y, \qquad f=D\phi/\phi. \qquad (7)$$

この変換により，(3)式および境界条件(4)は，

$$\frac{df}{dZ}+\frac{f^2-\alpha^2}{1-Z^2}+\frac{2Z}{Z-c}=0, \qquad (8)$$

$$f(\pm 1)=\mp\alpha, \qquad (9)$$

となる。条件 (9) は，$y=\pm\infty$で$D^2U=0$となる事を用いて，(3) (4)から得られる。(9)式は更に簡単になる。先ず，$\alpha\lesssim 1$の結果を考慮して，以下の解析でも$c\equiv i\,c_i$ ($c_i<0$)を仮定する。その結果，(8)の解fはエルミット共役性をもつ，即ち

$$f(Z_0, c)+f^*(Z_0^*, c^*)=0$$

たゞし，Z_0 はcより更に下方の，虚軸上の点とする。この性質を用いると，条件 (9)は

$$f(1)=-\alpha, \qquad Re\left[f(Z_0)\right]=0 \tag{10}$$

となる。

変換2

$$\zeta=\frac{2\gamma}{Z} \quad (\text{但し}\ \gamma=|c_i|), \qquad g=\frac{f}{\alpha}+1. \tag{11}$$

この変換により (8)，(10) は

$$\frac{dg}{d\zeta}+\frac{1}{k}\frac{1}{1-\frac{\zeta^2}{4\gamma^2}}(g^2-2g)+\frac{4ik}{\zeta^2(\zeta-2i)}=0, \tag{12}$$

$$g(2\gamma)=0 \qquad Re\left[g(\zeta_0)\right]=0 \tag{13}$$

となる。但し，$k=2\gamma/\alpha$，　$\zeta_0=2\gamma/Z_0$

ζ_0 の値は0と2の間で任意である。以下簡単に1ととる。図2に示した，解の有効領域は，図3のようになる。

方程式 (12)を解くには，独立変数ζの領域を，$\zeta=2\gamma$近傍(I)と，その他 (II) とに分けて取扱うとうまくゆく。
$g(2\gamma)=0$からわかるように，$\zeta=2\gamma$の近傍では，gの値は十分小さい。従つて，領域 (I) では，(12)式を線型化して，解くことが出来る。その結果，境界条件$g(2\gamma)=0$をみたす解：

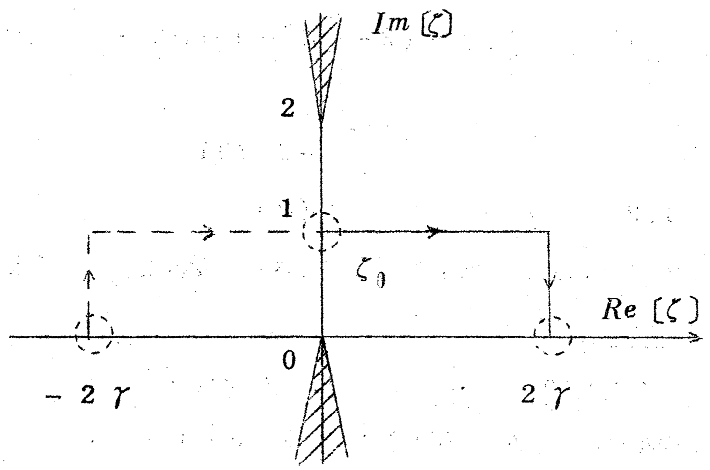

図3.　影をつけない領域で (12)式の解は有効。

$$g_{\mathrm{I}}=\frac{2ik^2}{\zeta^2(\zeta-2i)}\left(1-\frac{\zeta^2}{4\gamma^2}\right) \tag{14}$$

が得られる。

一方，領域（Ⅱ）では，gとkとが共に，γのベキ級数に展開出来ると仮定する。即ち，

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{II}}&=g_0+\gamma^{-\lambda_1}g_1+\gamma^{-\lambda_2}g_2+\cdots, \\ k&=k_0+\gamma^{-\lambda_1}k_1+\gamma^{-\lambda_2}k_2+\cdots, \end{aligned} \tag{15}$$

但し，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ は正の定数で，$k_1,k_2,\cdots$ が$O(1)$になるように，あとで決める。表式（15）を（12），（13）式に代入し，最低次の項のみを残すと，次の方程式と境界条件が得られる。

$$\frac{dg_0}{d\zeta}+\frac{1}{k_0}(g_0^2-2g_0)+\frac{4ik_0}{\zeta^2(\zeta-2i)}=0, \tag{16}$$

$$R_e\,[g_0(i)]=1. \tag{17}$$

g_0を具体的に求めるのは後にする。

さて，領域（Ⅰ），（Ⅱ）の全体を通して，完全な解を得るには，領域（Ⅰ），（Ⅱ）の間の適当な点$\zeta=\zeta_1$に於て，g_{I}，g_{II}を解析的に接続しなければならない。（12）式は一階方程式であるから，$\zeta=\zeta_1$に於けるgの解析性は，

$$g_{\mathrm{I}}(\zeta_1)=g_{\mathrm{II}}(\zeta_1) \tag{18}$$

であれば，保証される。今$\zeta_1=\gamma^{2/5}$ととれば，g_{I}ならびに（16），（17）の導出の際省略した項が，共に$O(\gamma^{-6/5})$となる。従つて，$\gamma=\infty$とおけば，g_{II}はg_0で表わされ，接続条件（18）は，

$$g_0(\infty)=0 \tag{19}$$

となる。結局，方程式（16）と境界条件（17），（19）が，k_0の固有値を決める。たゞし，方程式（16）は，非線型方程式であり，g_0を解析的な形で求める事は出来ない。数値解をあとで示す。

次に，g_1を同様の論法で求めると，固有値k_1，λ_1が，同時に決る。こゝでは，$\lambda_1=2$となる結果以外の詳細は，割愛する。（文献3参照）。$\lambda_1=2$を用いると，c_iの漸近形（$\alpha\gg1$に対する）は，

$$c_i=-\frac{k_0}{2}\alpha-\frac{k_1}{2}\frac{1}{\alpha}+\cdots \tag{20}$$

で与えられる。

4．数値解

境界条件（17），（19）に従う，方程式（16）の数値解を求め，k_0 の固有値を決める。数値計算の便宜上，変数変換：$\xi=\quad -i$ により，積分路を実軸に移す。この変換により，$G(\xi)=g_0(\quad)$ に対する方程式，境界条件は，（16），（17），（19）から，

$$\frac{dG}{d\xi}+\frac{1}{k_0}(G^2-2G)+\frac{4k_0(1+i\xi)}{(1+\xi^2)^2}=0\,, \tag{21}$$

$$Re\,[G(0)]=1\,, \qquad G(\infty)=0 \tag{22}$$

となる。

計算の手順は以下の通り，

(i) 無限区間 $\xi=[0,\infty]$ にかえて，適当に ξ_0 を決め，$\xi=[0,\xi_0]$ を積分領域とする。

(ii) k_0 を勝手に与え，$G(\xi_0)=0$ から出発し，Runge-Kutta 法（ピッチ $\Delta\xi$）で積分し，対応する $Re\,[G(0)]$ を求める。$Re\,[G(0)]=1$ となる k_0 の値の，およその見当をつける。

(iii) $Re\,[G(0)]\simeq 1$ となる k_0 を与え，$Re\,[G(0)]$ を求め，1からのずれに応じて k_0 を修正し，ずれが指定値より小さくなるまで，繰り返し計算を続ける。

(iv) 区間 $[0,\xi_0]$，ピッチ $\Delta\xi$ をいろいろ変えて，k_0 の固有値の動きを調べる。

計算の結果は，表1に示す通りである。

$\xi=[0,\xi_0]$	$\Delta\xi=0.2$		$\Delta\xi=0.1$	
[0, 4]	$k_0=0.752$	$Re\,[G(0)]=1.0000$ $Im\,[G(0)]=0.5037$	$k_0=0.752$	$Re\,[G(0)]=1.0000$ $Im\,(G(0)]=0.5037$
[0, 8]	$k_0=0.752$	$Re\,[G(0)]=1.0000$ $Im\,[G(0)]=0.5037$	....	....
[0, 8]	$k_0=4.46$	$Re\,[G(0)]=1.0000$ $Im\,[G(0)]=9.9207$	$k_0=4.43$	$Re\,[G(0)]=1.0000$ $Im\,[G(0)]=9.8575$
[0, 12]	....	....	$k_0=4.44$	$Re\,[G(0)]=1.0000$ $Im\,[G(0)]=9.8854$

表1　いろいろな区間 $[0,\xi_0]$ とピッチ $\Delta\xi$ に対する k_0 の値

この結果から，k_0 の固有値0.752および4.44は，ξ_0 および$\Delta\xi$に，殆んど依らないとみてよい。積分区間〔0，∞〕に対する解として，これを採用する。固有函数$G(\xi)$の数値表は省略する。$k_0 = 0.752, 4.44$ に対応して，

$$c_i = \begin{cases} -0.376\alpha + O(1/\alpha), & (23a) \\ -2.22\alpha + O(1/\alpha), & (23b) \end{cases}$$

が得られる。

(23a)，(23b)の結果を，(5a，b)(6)と共に，図4に示す。

$c_i(\alpha)$の二つのmode (5a，6)(5b)は，それぞれ漸近枝 (23a，b)に，十分早く近づくと思われる。乱れの高波数成分が，粘性ゼロの極限においても減衰し，その減衰率 (αc_i) が，漸近的に波数αの二乗に比例する結果は，極めて注目すべきことである。

付記　1)　この研究の本論文は参考文献3に発表。2)　数値計算は，ファコム株式会社 大阪計算所に，全面的に依頼した。費用は総額 ¥70，000。

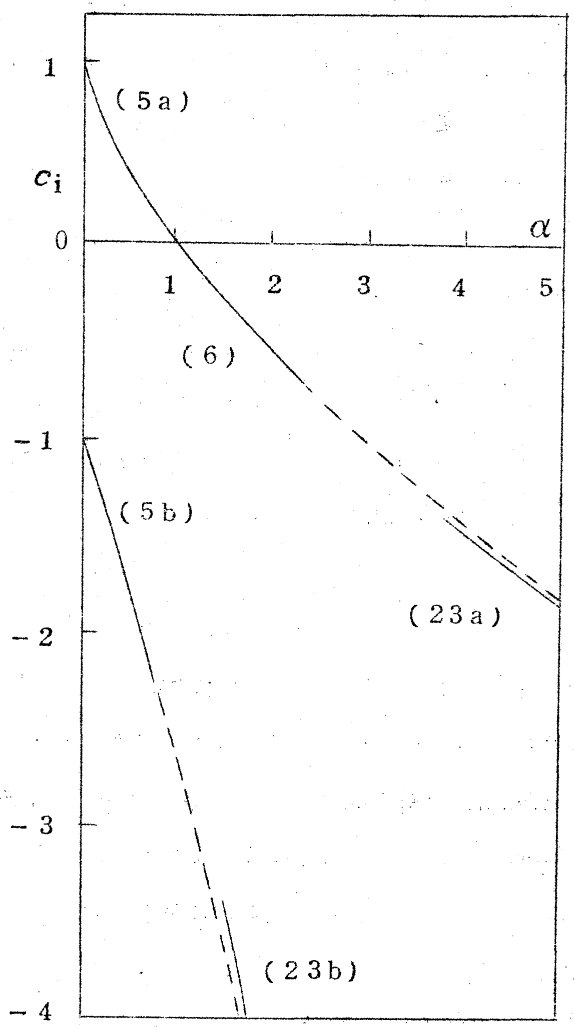

図4.　安定特性$c_i(\alpha)$

参考文献

1) T. Tatsumi，K. Gotoh & K. Ayukawa : J. Phys. Soc. Japan 19 (1964) 1966.

2) 角谷典彦："Orr-Sommerfeld方程式の転移点"，境界層と変わり点に関するシンポジウム報告

3) K. Gotoh : J. Phys. Soc. Japan 20 (1965) 164.