数理解析研究所講究録
第7巻 1965年 38-40

乱れの減衰の問題に対する準ガウス分布近似について

東大　海洋研　小　倉　義　光

均質な乱れについての主要問題の一つは，ある時刻における乱れの状態を知つて，それ以後の時刻における状態を予知することである。この問題については，これまでに多くの研究がなされてきたが，その大部分は乱れの減衰の終末状態かまたは与えた初期状態のごく近傍にのみ限られ，減衰の歴史の主要部分に適合する解はまだ得られていない。

この問題が困難なのは，閉じた連立方程式系を得ることができないからである。すなわち，運動方程式と連続方程式から，乱れの速度成分のn次モーメントについての方程式を導くと，運動方程式が非線型であるために，その方程式の中には（n＋1）次モーメントが入つてきてしまい，方程式系が有限のところでは閉じないのである。

この困難さを除くために，大別して2つの方法が用いられてきた。1つはKolmogorovやHeisenbergの理論のように，物理的考察に基づいて，乱れの力学的過程に，あるモデルを導入すること，他の1つはいわば解析的な逐次近似をほどこすことである。後者の方法の1つが，速度成分のjoint probabilityの分布がガウス分布にしたがうという仮定を用いることである。この仮定によれば，速度の4次のモーメントは2次のモーメントの函数として表現され，したがつて方程式系を閉じることができる。

この仮定に基づいて等方性乱れの減衰を議論することはProudmanとReid(1954)及びTatsumi(1957)によって独立に行われた。彼等は閉じた方程式系を導き，そこからRroudmanとReidはある初期状態におけるエネルギー・スペクトラムの時間的変化の瞬間的傾向を，Tatsumiは解を時間のベキ級数に展開して，ある初期状態の近くでのスペクトラム変化を求めた。

本研究は，上述の仮定によつて導かれる閉じた方程式系を，初期値問題として，数値的に解き，スペクトラムの時間的変化並びに異なつた波長をもつ乱れの間のエネルギー交換の様子を知ることを目的とする。その第1歩として，2次元等方性乱れが取り扱われた。厳密に2次元の流れは実験的に作りだすのは困難なものであるが，もともとこの研究の動機は，地球大気中で観測される流れにおいては，地球半径から高・低気圧の大きさに至るまでの大きさをもつ擾乱は，地表と圏界面のほぼ中間（高さ約5 kmあたり）では近似的に非発散の性質をもつことに注目し，そのような流れの統計的な性質を力学的に調べることから始められたものである。

計算はマサチユーセッツ工科大学（M.I.T.）の計算センターにあつたIBM709を用い

て行われた（現在はＩＢＭ７０９４におきかえられている）。その結果，ある程度時間が経過した後に，乱れのエネルギー・スペクトラムがある波長領域で負の値をとるということが見出された。同一の初期条件から出発して，数値積分の条件を種々変えて計算をくりかえした結果から判断して，負のエネルギー領域の出現という不合理な結果は，数値計算の誤差によるものとは考えられず，準ガウス分布という近似に基くものと結論された。

しかし厳密に２次元な流れは，粘性の影響を無視すれば，過度の総和が保存されるという極めて特殊な性質をもつた流れであり，上述の不合理な結果も２次元の流れに特有なものである可能性がある。この点を吟味するために，数値計算はより現実的な３次元等方性流れについて行われた。

この場合数値積分されるべき式はＴａｔｓｕｍｉ　の求めたものである。初期状態としては減衰の終末状態に対応する状態がとられた。この状態を採用したことは，計算の対象となる状態が終末状態に限られるということではなく，ｃｏｎｓｉｓｔｅｎｔ　な初期条件を与えるということにすぎない。

数値計算は，初期のレイノルズ数（R_λ）が∞，２８．８，１４．４，７．２及び１．８という値をとる５つの場合に対してなされた。ここに $(\overline{u^2})^{1/2}$ を乱れの速度の自乗平均の平方根，λ を逸散の長さ，ν を流体の動粘性係数とするとき，$R_\lambda=(\overline{u^2})^{1/2}\ \lambda/\nu$ で与えられる。

数値計算の結果によると，$R_\lambda=\infty$，２８．８及び１４．４のとき，負のエネルギー・スペクトラムが出現することが認められた。これが最初に起る時間は，$R_\lambda=\infty$のときには２．０８，$R_\lambda=28.8$のときは２．８２，$R_\lambda=14.4$のときは４．３６である。ここで時間の単位としては，$(E_0\kappa_0^3)^{-1/2}$ がとられている。κ_0 はｅｎｅｒｇｙ－ｃｏｎｔａｉｎｉｎｇな速度成分に対応する特徴的な波数，E_0 はエネルギー・スペクトラムの特徴的な値である。すなわち，レイノルズ数のこの範囲では，レイノルズ数が小さくなるにつれて出現時刻はおくれるが，負のエネルギーはやはり出現するという結果になる。数値計算にともなう誤差についても吟味されたが，結論は２次元流の場合と同じである。

$R_\lambda=7.2$ 及び１．８の場合の計算結果によると，エネルギーが負になるという証拠は見出されなかつた。レイノルズ数が非常に小さく，慣性項を無視できる場合には，方程式の解析的な解を求めることができる。その厳密解を数値解と比較したところによると，$R_\lambda=1.8$ の場合には両者は殆んど一致していて，慣性項の影響は殆んどないことを示し，$R_\lambda=7.2$の場合にも，乱れの減衰は主に粘性によつて支配されていることを示している。

以上のべたことから，ここで考えたような初期条件の下では，準ガウス分布はある波長領域で

自のエネルギー・スペクトラムを生じさせるという結論が得られた。ただし，同じことがちがった初期条件の下でも起るか否かについての吟味は本研究ではなされていない。

本研究の結果はすでに次の論文に記載されている。

Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions.
Phys. Fluids, 5 (1962), 395–401

Energy transfer in an isotropic turbulent flow.
J. Geophys. Res. 67 (1962), 3143–3149

A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence. J. Fluid Mech. 16 (1963), 33–40.