数理解析研究所講究録
第8巻 1966年 25-37

# 最適制御の存在に関して

神戸大学
理学部　菊　池　紀　夫

ポントリヤーギン〔1〕の最大原理は，制御可能であつて，かつ最適のものがあるとして，その必要条件をしらべたものです。

ここでは，制御は可能であるとして，その中で，最適なものが，実際にあるということを，保証する意味での，最適制御の存在について考えます。

この方面の研究としては，Lee and Markus〔2〕は，操作量が線型にはいつている場合の最適操作量の存在を示し，非線型にはいつている場合には，操作量函数にLipschitz条件という不自然な仮定をつけて，その存在を示しました。

いずれの場合も操作函数族のコンパクト性を用いているのですが，線型の場合には，ヒルベルト空間 $L^2$ における有界集合の弱コンパクト性を使つています。

非線型の場合には，操作函数族に正規性をもたせるために，一様Lipschitz 条件をつけているのです。

他方，La Salle〔3〕，L.W. Neustadt〔4〕が，有効に用いた手法として，A. Liapunov〔5〕の測度の値域に関する定理があります。

この結果だけ簡単にのべます。

「有限次元ベクトル空間の中に値域をもつ，可算加法的有限測度（必ずしも非負ではなくてもよい。）の値域は閉集合であり，その測度が，non-atomic の場合には，凸集合である。」

他に，この定理の証明を簡単にしたり，用いやすい様に拡張したものとしては，〔6〕，〔7〕〔8〕，〔9〕，〔10〕 等があります。

問題を時間最適性にしぼつて，方程式は非線型をあつかつたものに，Filippov〔11〕があります。

また，Roxin〔12〕は，その最大，最小が問題となる値が，積分の形であたえられているとき，それを微分形式になおし，一つ次元をあげた空間での微分方程式を考え（この手法はポントリヤーギンの最大原理の証明のときも用いられているのですが），初期位置から，各々の操作量に対応する解（操作量を固定すれば，解は唯一つきまると仮定しておく）の操作函数をある函数空間に動かしたとき，とりうる全体の範囲（attainable set）に着目して，この集合の

コンパクト性を用いて，ある量の最大，最小が実際にある事を示しています。

ここでは，最後にのべたattainable set の考え方をとることにして，考える方程式は簡単にして

$$dy(x)/dx = f(x, y(x), u(x))$$

$$y(x_0) = y$$ とします。

この解のとりうる範囲attainable setを，解の一意性のない方程式の解のとりうる範囲と比較して，考えます。すなわち，方程式の仮定として，u(x)をとつて固定したときには，解の一意性の条件をつけておけば，各々のu(x)にたいして解y(x)が唯一つたいおうするのですが，u(x)をある函数族の中を動かしたときに，たいおうする解，y(x)のとりうる範囲を，解の一意性の条件を仮定しない。

$$dy(x)/dx = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

方程式にたいするその解のとりうる範囲にたいする性質と，たいおうさせて考えようと思います。

そのため，Peano の最大解，最小解に関する定理〔13〕〔14〕〔15〕の証明の大略をのべます。

$f(x, y)$，$F(x, y)$ は考える領域で連続で，有界，更に $f(x, y) < F(x, y)$ が成り立つとします。

このとき

同じ初期条件 $y(x_0) = y_0$ で

$$dy/dx = f(x, y)$$

$$dy/dx = F(x, y)$$

の $0 \leq x - x_0 \leq a$ で連続な各々の解を $\varphi(x)$，$\Phi(x)$ とすれば

$$d\Phi(x)/dx = F(x, \Phi(x)) > f(x_1, \Phi(x))$$

成立して，$\Phi(x)$ は

方程式　$dy(x)/dx = f(x, y)'$ の上級函数になり，

$0 \leq x - x_0 \leq 0$　において

$$\varphi(x) \leqq \Phi(x)$$

が成立します。

この性質を用いることによつて

$\varepsilon_n \downarrow 0$ のとき

方程式　$dy/dx = f(x, y) + \varepsilon_n$

$$y(x_0) = y_0$$

の解を　$y = \varphi_n(x)$　とし

方程式　$dy/dx = f(x, y)$

$$y(x_0) = y_0$$

の任意の解を　$y = \varphi(x)$ とすれば

$$\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1} \geq \cdots \geq \varphi(x)$$

$$(0 \leq x - x_0 \leq a)$$

が成立し

$\{\varphi_n(x)\}$ の正規性によつて

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \overline{\varphi}(x) \ (\geq \varphi(x))$$

とおいたとき

$\overline{\varphi}(x)$ は，元の方程式の解になり，最大解であることが示されます。

今度は，操作函数のはいつた単独の方程式

$$dy(x)/dx = f(x, y(x), u(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

を考えます。

この場合は，操作函数u(x)を一つ選ぶ毎に，右辺の函数は変つてきます。

そこで，上の様に，右辺の函数を比較するという論法はできなくなります。

そこで，次には，Peano の最大解，最小解に関する定理をあげ，操作量のはいつた方程式にたいしても，適用できる様な最大解の構成を考えてみます。

**定　理**

$f(x, y)$ は $0 \leq x - x_0 \leq a$ ， $|y - y_0| \leq b$ で連続で， $|f(x, y)| \leq M$ ならば，$y(x_0) = y_0$ みたす $0 \leq x - x_0 \leq a' = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ で連続な $dy/dx = f(x, y)$ の解が少くとも，一つ存在する。

その中，最大なものと，最小のものとが，あつて，比の最大解，最小解を表わす曲線と，直線 $x = x_0 + a'$ とで囲まれた部分は $(x_0, y_0)$ を通る解でみたされる。

最大解の構成

$$dy/dx = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

なる解の存在は，コーシーの折れ線法で保証されている。

この解　$y(x)$　$(0 \leq x - x_0 \leq a')$ の　全体を

$$P = \{ y(x) \}$$

で表わすことにします。

$$0 \leq x - x_0 \leq a'$$

$$y_0 - b \leqq y(x) \leq y_0 + b$$

なので，xを任意に固定して

$$\overline{y}(x) = \sup_{y \in P} y(x) \quad \text{とおけば}$$

$\overline{y}(x)$ は　$0 \leq x - x_0 \leq a'$　で定義された，

$$y_0 - b \leq \bar{y}(x) \leq y_0 + b$$

$$\bar{y}(x_0) = y_0$$

みたす函数です。

まず，この $\bar{y}(x)$ が $0 \leq x - x_0 \leq a'$ で連続函数であることは

$$x_0 \leq x_1 \leq x_0 + a'$$

なる，任意の $x_1$ に，たいして，適当な $y_n^{(1)}(x) \in P$ が存在して，

$$0 \leq \bar{y}(x_1) - y_n^{(1)}(x_1) < \frac{1}{n}$$

が成立します。

また，$x_0 \leq x_1 + h \leq x_0 + a'$ にたいしても，適当な $y_n^{(2)} \in P$ があつて

$$0 \leq \bar{y}(x_1 + h) - y_n^{(2)}(x_1 + h) < \frac{1}{n}$$

ここで $y_n(x) = \max(y_n^{(1)}(x), y_n^{(2)}(x))$ とおけば

$y_n(x) \in P$ であつて

勿論，次の関係成立します。

$$0 \leq \bar{y}(x_1) - y_n(x_1) < \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \bar{y}(x_1 + h) - y_n(x_1 + h) < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad y_n(x_1 + h) - y_n(x_1) - \frac{1}{n}$$

$$\leqq \bar{y}(x_1 + h) - \bar{y}(x_1)$$

$$\leqq y_n(x_1 + h) - y_n(x_1) + \frac{1}{n}$$

ここで，$y_n(x)$ は方程式の解で，その同程度連続であることを用いると，十分大きなnにたいして上の不等式用いて

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0$$

$|h| < \delta$ であれば

$$|\bar{y}(x_1 + h) - \bar{y}(x_1)| < \varepsilon$$

が成立します。

これで，$\bar{y}(x)$ の $0 \leq x - x_0 \leq a'$ における連続性は示されました。

今度は，$\bar{y}(x)$ が方程式の解になる事を示します。

$x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ をn等分して，その分点を

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x_0 + a'$$

とし，連続性を示したときと同様に

$$0 \leq \bar{y}(x_i) - y_n^{(i)}(x_i) < \frac{1}{n}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

の様に $y_n^{(i)}(x) \in P$ をえらび

$$\max_{i=1,2,\cdots,n} \{ y_n^{(i)}(x) \} = y_n(x)$$

とおけば　$y_n(x) \in P$ です。

$\{y_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は正規族をなすので，一様集束な部分列がとりだせます。

簡単のために

$y_n(x) \to y(x)$　（一様収束）とします。

この $y(x)$ は

$dy_n / dx = f(x\, y_n) \to f(x, y)$　（一様収束）

により

$$dy(x)/dx = f(x, y(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

したがつて　$y(x) \in P$　です。

最後に，この解$y(x)$が，$\overline{y}(x)$に一致することを示します。

$\forall \varepsilon > 0$　あたえられたときに

$y_n(x)$が，$y(x)$に一様収束することより，$\exists N'$ がきまつて

$\forall n \geqq N'$　にたいして

$$|y_n(x) - y(x)| < \varepsilon$$

また，$\overline{y}(x)$，$y(x)$の連続性により，

$\exists \delta > 0$がきまり

$|x - x'| < \delta$ であれば

$$|\overline{y}(x) - \overline{y}(x')| < \varepsilon$$

$$|y(x) - y(x')| < \varepsilon$$

ここで，　$N = \mathrm{Max}\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{a'}{\delta}, N'\right)$ とおきます。

このNにたいして

$\forall n \geq N$で考えると，$x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ なる任意のxにたいして，

$|x - x_i| < \delta$である $x_i$ が存在し

$$|\overline{y}(x) - y(x)| \leqq |\overline{y}(x) - \overline{y}(x_i)|$$

$$+ |\overline{y}(x_i) - y_n(x_i)| + |y_n(x_i) - y(x_i)|$$

$$+ |y(x_i) - y(x)|$$

$$< 4\varepsilon$$

すなわち　$x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ で $\overline{y}(x) = y(x)$ である。

このことは，$\overline{y}(x)$は方程式の解であり，任意の解$y(x)$にたいして

$$\overline{y}(x) \geqq y(x)$$

即ち，最大解になつています。

最後に操作函数のはいつた単独の方程式　$dy(x)/dx = f(x, y(x), u(x))$ を考えます。

方程式に対する仮定としては

1)　$f(x, y, u)$ は $[x_0, x_0+a] \times R^1 \times U$ で定義されている。

但し，$U$は$R^1$ の有界閉集合。

2)　$f(x, y, u)$ は $(y, u)$ に関しては連続であり，

$(y, u) \in R^1 \times U$ を任意に固定したとき，$x$に関して，可積分である。

3)　$\exists K > 0$があつて，任意の $(x, u) \in [x_0, x_0+a] \times U$にたいして

$$|f(x, y, u) - f(x, y_2, u)|$$
$$\leqq K|y_1 - y_2|$$

4)　$\exists M > 0$ があつて $|f(x, y, u)| \leqq M$ である。

操作函数族　$C = \{u(x)\}$としては，Chang〔16〕に従つて，次の条件をみたすものをとります。

5)　$u(x)$は $0 \leqq x - x_0 \leqq a$ で定義された可測函数で，その値はつねに $u(x) \in U$とする。

6)　$\forall \varepsilon > 0$，$\forall \delta > 0$にたいして$\exists K(\varepsilon, \delta)$がさだまり，$\forall k \geqq K(\varepsilon, \delta)$，任意の$u(x) \in C$に対して，次の関係をみたす$\{u_k(x)\}$がある。

$$\mathrm{mes}\{x ; |u(x) - u_k(x)| \geqq \varepsilon\} < \delta$$

但し，$u_k(x)$は，$k$個以上の不連続点はない単函数。

6) をみたす函数族としては，断片的には，同程度連続な函数族があります。

Chang の定理によれば，$C$の中からほとんどいたるところ一様収束する列が取り出せます。

考える方程式は　$dy(x)/dx = f(x, y(2), u(x))$

$$y(x_0) = y_0$$

但し　$u(x) \in C$

一つの$u(x)\in C$に対応する解$y(x)$は Caratheodory の存在定理によって，$x_0 \leq x \leq x_0 + a$ で唯一つ存在しますが，$u\in C$を動かしたときの解全体を $P=\{y(x)\}$ とします。

ここで，$\overline{y}(x) = \sup_{y\in P} y(x)$とおけば，前と同じ様に，操作函数のはいつた単独方程式にたいする最大解の概念を考えたわけです。

更に，方程式系について考察します。

$$dy/dx = f(x, y, u)$$

1) $f$は $[x_0, x_0+a] \times R^n \times U$

で定義されている。

但し，$U$は$R^m$ の有界閉集合。

2) $f(x, y, u)$ は $(y, u)$ に関しては連続であり，

$$(y, u) \in R^n \times U$$

を任意に固定したとき，$x$に関して可積分。

3) $\exists K>0$があって任意の $(x, u)\in [x_0, x_0+a]\times U$にたいして

$$\| f(x, y_1, u) - f(x, y_2, u)\|$$

$$\leqq K \| y_1 - y_2 \|$$

4) $\exists M>0$があって

$\| f(x, z, u)\| \leqq M$ である。

操作函数族 $C=\{u(x)\}$ としては，次の条件をみたすものをとります。

5) $u(x)$は $0\leq x-x_0 \leq a$で定義された可測函数で，その値はつねに $u(x)\in U$とする。

6) $\forall \varepsilon>0$ $\forall \delta>0$にたいして $K(\varepsilon, \delta)$ が定まり

$$\forall k \geqq K(\varepsilon, \delta)$$

任意の $u(x)\in C$ にたいして，次の関係をみたす。

$\{u_k(x)\}$ がある。

$$\mathrm{Mes}\{x ; \| u(x) - u_k(x) \| \geqq \varepsilon\} < \delta$$

但し　$u_k(x)$ はk個以上の不連続点はない単簡数。

このとき（$x_0$，$y_0$）から出る解曲線（$0 \leq x - x_0 \leq a$ で定義されている。）　のみたす集合をR($x_0$ $y_0$) とすると，R($x_0$ $y_0$) はコンパクト集合になり，福原先生の性質が示されます。

すなわち

"R($x_0$ $y_0$）の境界上に任意にあたえられた点と，（$x_0$ $y_0$）とを通る解曲線で境界にばかり属するものがある。"

今度は考える方程式と仮定は前のままにして

コスト函数

$$y^0(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y(x), u(x))\, dx$$

は，べつにとり出して考えます。

$$\varphi(x, y, u)$$

にたいする仮定は，方程式の右辺 f（x，y，u）につけた仮定と同じにします。操作函数u(x)にたいおうする解をy(x)とするとき，$0 \leq x - x_0 \leq a$で定義された

$Z(x) = (y(x), u(x))$ の全体をAとします。

次の様な距離

$$\| Z_1 - Z_2 \| = \sup_{0 \leq x - x_0 \leq a} \| y_1(x) - y_2(x) \|$$

$$+ \operatorname{ess\cdot sup}_{0 \leq x - x_0 \leq a} \| u_1(x) - u_2(x) \|$$

で，Aはコンパクト距離空間になります。

ここで，xは固定して

$$\sup_{z \in A} \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y(x), u(x))\, dx = \overline{y}^0(x)$$

とおけば，$\overline{y}^0(x)$が $0 \leq x - x_0 \leq a$で連続函数になることを示します。

Aはコンパクトなので

$$\bar{y}^0(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x))\,dx$$

$$\bar{z}(x) = (\bar{y}(x), \bar{u}(x)) \in A$$

はあります。

$\{x_n\} \to x$ なる任意の $\{x_n\}$ にたいして

$$\bar{y}^0(x_n) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \bar{y}^{(n)}(x), \bar{u}^{(n)}(x))\,dx$$

$$\exists(\bar{y}^{(y)}(x), \bar{u}^{(n)}(x)) \in A$$

A がコンパクトなので，適当な部分列 $(\bar{y}^{(n')}(x), \bar{u}^{(n')}(x))$ をとれば $(y^*(x), u^*(x)) \in A$ に収束します。

すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \bar{y}^0(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_{n'}} \varphi(x, \bar{y}^{(n')}(x), \bar{u}^{(n')}(x))\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y^*(x), u^*(x))\,dx$$

一方

$$\bar{y}^0(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_{n'}} \varphi(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x))\,dx$$

$$\leqq \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_{n'}} \varphi(x, \bar{y}^{(n')}(x), \bar{u}^{(n')}(x))\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y^*(x), u^*(x))\,dx$$

ここで $\bar{y}^0(x)$の定義を考えると

$$\bar{y}^0(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y^*(x), u^*(x))\,dx$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \bar{y}^0(x'_n) = \bar{y}^0(x)$$

$\{x_n\}$ は任意の，xに収束するもので，その適当な部分列 $\{x_n'\}$ をとれば

$$\lim_{n\to\infty} \overline{y}^0(x_n') = \overline{y}^0(x)$$

なので，$\overline{y}^0(x)$の連続性は示されました。

## 参　考　文　献


1) L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mischenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York, 1962.

2) E.B. Lee and L. Markus Optimal control for nonlinear processes, Arch. Rational Mech. Anal., 8(1961), pp. 36-58

3) J.P. La Salle, The time optimal control problem, Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol.5, Princeton University Press, Princeton, 1960, pp.1-24

4) L.W. Neustadt, The existence of optimal controls in the absence of Convexity conditions, J.Math.Anal. Appl., 7(1963) 110-117.

5) A. Liapunov, Sur les fonctions-vecteurs conplétement additives, Bull. Acad.Sci. URSS. Ser. Math.(Izv. Akad. Nauk SSSR),4(1940), pp.465-478.

6) P.R. Halmos, The range of a vector measure, Bull. Amer. Math. Soc., 54(1948) pp.416-421

7) Blackwell. D. The range of certain vector integrals. Proc. Am. Math. Soc., 2, No.3, (1951) pp.390-395.

8) Halkin, H. Liapounov's theorem on the range of a vector measure and Pontryagin's maximum principle Arch. Rational Mech. Anal. 10, No.4, (1962), pp.296-304.

9) H. Hermes, A note on the range of a vector measure; application to the theory of optimal control, J, Math. Anal. Appl., 8 (1964), pp.78-83.

10) A. Dvoretzky, A. Wald and J. Wolfowitz, Relations among certain range of vector measures, Pacific J. Math., 1 (1951), pp.59-74.

11) A.F. Filippov, On certain questions in the theory of optimal control, Vestnik Moscov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him, 2 (1959), pp.25-32 English translation in Control, 1 (1962), pp.76-84.

12) E.O. Roxin, The existence of optimal conrols. Mich. J. 9 (1962), pp.109-119.

13) 福原 満洲雄 常微分方程式論 岩波講座 (1933).

14) 福原 満洲雄 常微分方程式 岩波全書 (1950).

15) 福原 満洲雄, 佐藤 徳意 微分方程式論 共立現代数学講座 (1956)

16) S.S.L. Chang An extension of Ascoli's theorem and its applications to the theory of optimal control, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965) pp.445-470.