数理解析研究所講究録
第18巻 1966年 131-144

定数係数の線型偏微分方程式に類比な多段階差分方程式の行列理論

九大　理　　柴垣　和三雄
福岡教育大　　丸木　五一

§1　線型偏微分方程式の初期値問題に類比な差分問題

最も簡単な典型的問題として，つぎの初期値問題を取り上げる．

$$(0)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \leqq x \leqq 1,\quad 0 \leqq t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & (0 \leqq t) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_0^1(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

この問題は $L^2[0,1]$ 関数空間において適切で Lax 理論では L^2 ノルムに基いて近似理論が展開されているのであるが，ここでは問題が滑かな関数の空間においても適切であるので，実用的見地からはより望ましい sup ノルムに基く近似理論を展開しようと思う．

正間 $[0,1]$ を $M+1$ 等分して

$$h = \Delta x = \frac{1}{M+1}, \qquad k = \Delta t$$

とおき，格子点関数

$$u(jh, nk) = u_j^n \qquad (j=1,\ldots,M;\ n=0,1,2,\ldots)$$

を考える。つねに $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$ であるので，$(u_j^n,\ j=1,\ldots,M)$ なる M 次元ベクトル u_n を対象にできる．滑かな関数に対しては，

$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} + O(k^2),$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2)$$

$$= \frac{u(x+h,t+k)-2u(x,t+k)+u(x-h,t+k)}{h^2} + O(h^2+k+\frac{k^3}{h^2})$$

が成り立つ．それで $u_{tt}=u_{xx}$ の滑かな解 $u(x,t)$ に対しては，陽表公式

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{k^2} = \frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2+k^2)$$

あるいは陰伏公式

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{k^2} = \frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2+k+\frac{k^3}{h^2}+k^2)$$

が成り立つ．以下で $r = \frac{k}{h} = \text{constant}$ として $k \downarrow 0$ にやることを考えるので，そのときは陽表型は

$$u_j^{n+1} = r^2u_{j+1}^n + 2(1-r^2)u_j^n + r^2u_{j-1}^n - u_j^{n-1} + O(k^4)$$

あるいは

(1) $$u_{n+1} = A^{(0)}u_n + A^{(1)}u_{n-1} + \delta_n$$

とかける．ここに

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ \cdots & r^2, & 2(1-r^2), & r^2, & \cdots \\ & & \cdots & & \end{bmatrix} \quad \text{(tridiagonal)}$$

$A^{(1)} = -I$ ： M×M 型単位行列

δ_n は $O(k^4)$ の列行列

陰伏型は

$$r^2u_{j+1}^{n+1} - (1+2r^2)u_j^{n+1} + r^2u_{j-1}^{n+1} = -2u_j^n + u_j^{n-1} + O(k^3)$$

あるいは

$$Fu_{n+1} = -2Iu_n + Iu_{n-1} + O(k^3),$$

でここに

$$F = \begin{bmatrix} & & \cdots\cdots & & \\ \cdots & r^2, & -(1+2r^2), & r^2, & \cdots\cdots \\ & & \cdots\cdots & & \end{bmatrix}$$

F^{-1} を乗ずれば，また (1) の形になる．ただし δ_n は今度は $O(k^3)$ のものである．

もし類比公式として

$$(1+p)\left(\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{k^2}\right) - p\left(\frac{u_j^n-2u_j^{n-1}+u_j^{n-2}}{h^2}\right)$$

$$= \frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2+k+\frac{k^3}{h^2}+k^2+h+\frac{h^3}{k^2})$$

を用いれば，これは

$$u_{n+2} = A^{(0)}u_{n+1} + A^{(1)}u_n + A^{(2)}u_{n-1} + \delta_{n+1}$$

の形で，ここに $\delta_{n+1} = O(k^3)$

一般に order (m+1) あるいは (m+2) levels の差分方程式

(2) $$u_{n+m} = A^{(0)}u_{n+m-1} + A^{(1)}u_{n+m-2} + \ldots + A^{(m)}u_{n-1}$$

は，$r = k/h = \mathrm{constant}$ で $k \downarrow 0$ にやるとき，偏微分方程式 (0) の滑かな解 u に対する差

$$\delta_{n+m-1} = u_{n+m} - A^{(0)}u_{n+m-1} - \cdots - A^{(m)}u_{n-1}$$

が $O(k^2)$ なるとき，偏微分方程式 (0) に類比な差分方程式であるといい，$O(k^2)$ の 0 への収束がはやいものほど近似の精度のよい公式であるという．

§2. 差分方程式 $u_{n+m} = A^{(0)}u_{n+m-1} + A^{(1)}u_{n+m-2} + \cdots + A^{(m)}u_{n-1} + \delta_{n+m-1}$ の一般理論

ここに $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}$ は任意の $M \times M$ 型定行列である。

$m=1$ の場合で考える．

(3) $$u_{n+1} = A^{(0)}u_n + A^{(1)}u_{n-1} + \delta_n$$

初期値問題としては u_0，u_1 given として，u_1，u_2，$\cdots$ を定める問題であるが，一般的には n は任意の整数としてよい．つぎつぎに代入すると

(4) $$u_{n+1} = P_n^{(0)}u_1 + P_n^{(1)}u_0 + q_{n+1}$$

の表示が得られる．ここに $P_n^{(0)}$，$P_n^{(1)}$ は $A^{(0)}$，$A^{(1)}$ にのみ依存する $M \times M$ 型行列，q_{n+1} は $\delta_1, \ldots, \delta_n$ の 1 次形式で係数は同様な行列のものである．これらの性質をしらべると，

まず

(5) $$P_{n+1}^{(0)} = A^{(0)}P_n^{(0)} + A^{(1)}P_{n-1}^{(0)} ,$$

(6) $$P_{n+1}^{(1)} = A^{(0)}P_n^{(1)} + A^{(1)}P_{n-1}^{(1)} ,$$

(7) $$q_{n+1} = A^{(0)}q_n + A^{(1)}q_{n-1} + \delta_n .$$

$P_n^{(0)}$, $P_n^{(1)}$ はともに斉次方程式

(8) $$u_{n+1} = A^{(0)}u_n + A^{(1)}u_{n-1}$$

の解で，つぎの初期条件をみたす：

(9) $$P_0^{(0)} = I, \qquad P_1^{(0)} = A^{(0)} ,$$

(10) $$P_0^{(1)} = 0, \qquad P_1^{(1)} = A^{(1)} .$$

q_n は非斉次方程式 (3) の解で，つぎの初期条件をみたす：

(11) $$q_0 = q_1 = 0 .$$

また初期条件 $C_0 = A^{(0)}$ に対する order 1 の差分方程式

(12) $$C_n = A^{(0)} + A^{(1)}C_{n-1}^{-1}$$

の解が $C_n = P_{n+1}^{(0)}(P_n^{(0)})^{-1}$ なることがわかる．また

(13) $$P_n^{(1)} = P_{n-1}^{(0)}A^{(1)} ,$$

(14) $$C_{n-1}C_{n-2}\cdots C_1C_0 = P_n^{(0)}$$

なる関係がいえる．また非斉次方程式 (3) の初期値 u_0, u_1 に対する解が (4) で与えられ，それにおいて

$$q_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} P_{n-i}^{(0)} \delta_i \tag{15}$$

となることがいえる.

m が一般なときにも同様なことがいえる.

$$u_{n+m} = A^{(0)} u_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)} u_{n-1} + \delta_{n+m-1} \tag{16}$$

に属する斉次方程式

$$u_{n+m} = A^{(0)} u_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)} u_{n-1} . \tag{17}$$

逐次代入により得られるべき式

$$u_{n+m} = P_n^{(0)} u_m + P_n^{(1)} u_{m-1} + \cdots + P_n^{(m)} u_0 + q_{n+m} \tag{18}$$

における $P_n^{(0)}$, $P_n^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, m)$ はいずれも (17) をみたし,

$$\left\{\begin{aligned} P_0^{(0)} &= I , \\ P_1^{(0)} &= A^{(0)} P_0^{(0)} , \\ P_2^{(0)} &= A^{(0)} P_1^{(0)} + A^{(1)} P_0^{(0)} , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m^{(0)} &= A^{(0)} P_{m-1}^{(0)} + A^{(1)} P_{m-2}^{(0)} + \cdots + A^{(m-1)} P_0^{(0)} \end{aligned}\right. \tag{19}$$

および類似の式をみたすが, 著しい関係として

$$P_n^{(i)} = P_{n-1}^{(0)} A^{(i)} + P_{n-2}^{(0)} A^{(i+1)} + \cdots\cdots \quad (i=1, \cdots, m) \tag{20}$$

がいえる．ただし右辺で $A^{(m+1)}$, $A^{(m+2)}$, ... 等の項は 0 とおくものとする．

また非線型方程式

(21) $$C_n = A^{(0)} + A^{(1)}C_{n-1}^{-1} + A^{(2)}(C_{n-1}C_{n-2})^{-1} + \cdots\cdots + A^{(m)}(C_{n-1}C_{n-2}\cdots C_{n-m})^{-1}$$

の初期条件 $C_n = P_{n+1}^{(0)}(P_n^{(0)})^{-1}$ $(n = 0,1,\cdots,m-1)$ に対する解が

(22) $$C_n = P_{n+1}^{(0)}(P_n^{(0)})^{-1} \quad (n = m,m+1,\cdots)$$

なること，したがつて表示

(23) $$C_{n-1}C_{n-2}\cdots C_1C_0 = P_n^{(0)}$$

がいえる．

非斉次方程式 (16) の初期値 u_0, $u_1,\cdots,u_m$ に対する解は (18) で

(24) $$q_{n+m} = \sum_{i=m}^{n+m-1} P_{n+m-i-1}^{(0)}\delta_i$$

としたもので与えられる．

§3. 類比差分方程式 (16) の係数が §1 に述べたような特別な 3- 対角行列の場合の解

(25) $$A^{(i)} = a_iI + \alpha_jJ \quad (i=0,1,\ldots,m)$$

ここに a_i, α_j は実数，

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

のときは

1次変換

(26) $$v_n = Tu_n$$

(27) $$T = \left(\sin \frac{ij\pi}{M+1}, \quad \begin{matrix} i\downarrow 1,\cdots,M \\ j\rightarrow 1,\cdots,M \end{matrix} \right), \quad T^{-1} = \frac{2}{M+1} T$$

によつて，(16) は

(28) $$v_{n+m} = B^{(0)} v_{n+m-1} + B^{(1)} v_{n+m-2} + \cdots + B^{(m)} v_{n-1} + \varepsilon_{n+m-1}$$

に直される．ここに

(29) $$B^{(i)} = TA^{(i)}T^{-1} = a_i I + 2\alpha_i G ,$$

(30) $$G = \mathrm{Diag}\ (\cos \frac{\pi}{M+1}, \cos \frac{2\pi}{M+1}, \cdots, \cos \frac{M\pi}{M+1}) .$$

すなわち

(31) $$x_j^{(i)} = a_i + 2\alpha_i \cos \frac{j\pi}{M+1} \qquad (i=0,1,\cdots,M;\ j=1,\cdots,M)$$

とおけば

(32) $$B^{(i)} = \mathrm{Diag}\ (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_M^{(i)})$$

まず斎次方程式

(33) $$v_{n+m} = B^{(0)} v_{n+m-1} + \cdots + B^{(m)} v_{n-1}$$

の特解を $v_n = \rho^n C$, $C = [\gamma_1, \cdots, \gamma_M]'$ の形で求めると，

$$
\begin{bmatrix}
\rho^{m+1}-x_1^{(0)}\rho^{m}-x_1^{(1)}\rho^{m-1}-\cdots-x_1^{(m)}, & & & \\
 & \rho^{m+1}-x_2^{(0)}\rho^{m}-x_2^{(1)}\rho^{m-1}-\cdots-x_2^{(m)}, & \cdots & ,0 \\
 & & \ddots & \\
0, & & & \rho^{m+1}-x_M^{(0)}\rho^{m}-x_M^{(1)}\rho^{m-1}-\cdots-x_M^{(m)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M
\end{bmatrix}
= 0
$$

(34) $\rho_{j,s} \qquad (s=1,\ldots,m+1)$

を j 番目の方程式

(35) $\rho^{m+1} - x_j^{(0)}\rho^{m} - x_j^{(1)}\rho^{m-1} \cdots\cdots x_j^{(m)} = 0$

の (m+1) 個の根とし，これら (m+1) 個の根は相異なるとすれば，これに対する固有ベクトルを一定な

(36) $C_j = (\delta_{kj},\ k=1,\cdots,M)$

にとつて，一般解は次式で与えられる；

(37) $v_n = \sum_{j=1}^{M}\left\{ \sum_{s=1}^{m+1} c_{j,s}\rho_{j,s}^{n} C_j \right\}$

ここに $c_{j,s}$ は (m+1)M 個の任意定数である.

(38) $TP_n^{(0)}T^{-1} = \tilde{P}_n^{(0)},$

(39) $v_{n+m} = \tilde{P}_n^{(0)}v_m + \tilde{P}^{(1)}v_{m-1} + \cdots + \tilde{P}_n^{(m)}v_0$

で定義される対角行列 $\tilde{P}_n^{(0)}$ は，斉次方程式 (28) を初期条件

$$
(40)\qquad
\begin{cases}
\tilde{P}^{(0)}_{0} = I\ , \\
\tilde{P}^{(0)}_{1} = B^{(0)}\tilde{P}^{(0)}_{0} \\
\tilde{P}^{(0)}_{2} = B^{(0)}\tilde{P}^{(0)}_{1} + B^{(1)}\tilde{P}^{(0)}_{0}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\tilde{P}^{(0)} = B^{(0)}\tilde{P}^{(0)}_{m-1} + B^{(1)}\tilde{P}^{(0)}_{m-2} + \cdots + B^{(m-1)}\tilde{P}^{(0)}_{0}
\end{cases}
$$

で満たすことから，上の一般解を利用して容易に決定される．たとえば $\tilde{P}^{(0)}_{n}$ の第１列の決定は

$$
\begin{array}{llll}
\sum C_{1,s}=1, & \sum C_{1,s}\rho_{1,s}=x^{(0)}_{1}, & \sum C_{1,s}\rho^{2}_{1,s}=(x^{(0)}_{1})^{2}+x^{(1)}_{1}, & \ldots,\ \sum C_{1,s}\rho^{m}_{1,s}=\quad, \\
\sum C_{2,s}=0, & \sum C_{2,s}\rho_{2,s}=0, & \sum C_{2,s}\rho^{2}_{2,s}=0\ , & \ldots,\ \sum C_{2,s}\rho^{m}_{2,s}=0, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum C_{M,s}=0, & \sum C_{M,s}\rho_{M,s}=0, & \sum C_{M,s}\rho^{2}_{M,s}=0\ , & \ldots,\ \sum C_{M,s}\rho^{m}_{M,s}=0,
\end{array}
$$

（ここに $\sum$ は $\sum_{s=1}^{m+1}$ ，$\circledast = x^{(0)}_{1},\ x^{(1)}_{1},\ldots,x^{(m-1)}_{1}$ についての多項式）より $C_{1,s} = \gamma_{1,s}$ ，$C_{2,s} = \cdots\cdots = C_{M,s} = 0$ ときめられることから，

$$
(41)\qquad [\ \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{1.s}\rho^{n}_{1,s}\ ,\ 0\ ,\ \cdots\ ,\ 0]'
$$

となる．かくて

$$(42)\qquad \widetilde{P}_n^{(0)} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{1,s}\rho_{1,s}^n, & 0 & , & \\ 0, & \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{2,s}\rho_{2,s}^n, & & , 0 \\ 0, & & , & \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{M,s}\rho_{M,s}^n \end{bmatrix}$$

つぎに他の行列　$P_n^{(i)}$　(i=1,...,m)　の表現については，　(20)　に相当する式

$$(43)\qquad \widetilde{P}_n^{(i)} = \widetilde{P}_{n-1}^{(0)}B^{(i)} + \widetilde{P}_{n-2}^{(0)}B^{(i+1)} + \cdots\cdots$$

に　(42)　の結果を用いれば得られる．

$$(44)\qquad \widetilde{P}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} n-1\text{ 次の }\{\rho_{1,s}\}\text{の多項式}, & & 0, \\ 0, & n-1\text{ 次の }\{\rho_{2,s}\}\text{の多項式}, & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0, & & n-1\text{ 次の }\{\rho_{M,s}\}\text{の多項式} \end{bmatrix}$$

§4.　安定条件とそれの誤差および離差評価における意味

u=u(x,t)　を§1　の冒頭に述べた問題　(0)　の滑かな初期値に対する滑かな解

U=U(x,t)　を同じ初期値に対応する類比差分問題の格子点領域　x=jh　t = nk　(j = 1,...,M; n = 0,1,...,N,　$Nk \leqq \tau$)　における正確解．

このとき

$$(45)\qquad e = U - u$$

を近似 U　の　u に対する誤差　(error)　という．この誤差を　sup　ノルムで

評価し $r = k/h = \text{const.}$ のもとに $k \downarrow 0$ ならしめるとき $\|e\| \to 0$ となる可能性をしらべる．類比差分方程式 の定義から

(46) $$e_{n+m} = A^{(0)} e_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)} e_{m-1} + (-\delta_{n+m})$$

(47) $$\delta_{n+m} = O(k^{2+\alpha}), \quad \alpha > 0$$

が成り立つ．定理3により

(48) $$e_{n+m} = P_n^{(0)} e_m + P_n^{(1)} e_{m-1} + \cdots + P_n^{(m)} e_0 + (-q_{n+m})$$

とかけるが，ここに $e_m = e_{m-1} = \cdots = e_0 = 0$ であるから

(49) $$e_{n+m} = -q_{u+m} = -\sum_{i=m+1}^{n+m} P_{n+m-i}^{(0)} \delta_i \ .$$

(50) $$\therefore \quad \|e_{n+m}\| \leqq \sum_{i=m+1}^{n+m} \|P_{n+m-i}^{(0)}\| \cdot \|\delta_i\| \ .$$

(47) を考慮すれば，もし r のある閉区間 Ir と $n=0,1,\cdots,N$ に関し一様に

(51) $$\|P_n^{(0)}\| = O\left(\frac{1}{k^{1+\beta}}\right), \quad 0 \leqq \beta < \alpha$$

が成り立てば

(52) $$\|e_{n+m}\| = O(k^{\alpha-\beta}) = O(1)$$

を得る．条件 (51) を類比差分問題の安定条件という．これが満足されれば，sup ノルムにおいて収束性 $U \to u$ が成り立つ．つぎに

$u^* = u^*(x,t)$ を上の差分問題の近似解とする，したがつて

(53) $$u^*_{n+m} = A^{(0)}u^*_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)}u^*_{n-1} + \delta^*_{n+m},$$

(54) $$u^*_0 = u_0 + \delta^*_0, \ldots , \quad u^*_m = u_m + \delta^*_m$$

で，ここに $\delta^*_0,\ldots,\delta^*_m$ は $u_0,\ldots,u_m$ を計算する際の計算誤差，
δ^*_{n+m} は与えられた $u_{n+m-1},\ldots,u_{n-1}$ に対して
$A^{(0)}u_{n+m-1}+\cdots+A^{(m)}u_{n-1}$ を計算するとき生ずる総計算誤差を表わす．

(55) $$d = u^* - U$$

を近似 u^* の U に対する離差 (departure) という．

(56) $$d_{n+m} = A^{(0)}d_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)}d_{n-1} + \delta^*_{n+m},$$

(57) $$d_0 = \delta^*_0, \ldots , d_m = \delta^*_m$$

により

(58) $$d_{n+m} = P^{(0)}_n d_m + P^{(1)}_n d_{m-1} + \cdots + P^{(m)}_n d_0 + q^*_{n+m},$$

(59) $$q^*_{n+m} = \sum_{i=m+1}^{n+m} P^{(0)}_{n+m-i}\delta^*_i$$

いま

(60) $$\max\left\{\|\delta^*_i\|,\ i = 0,1,\ldots,m;\ m+1,\ldots,N\right\} = \bar{\delta}$$

とおけば，安定条件のもとに

(61) $$\|q^*_{n+m}\| = \bar{\delta}\cdot O\left(\frac{1}{k^{2+\beta}}\right)$$

したがって

(62) $$\|d_{n+m}\| = \bar{\delta}\cdot O\left(\frac{1}{k^{2+\delta}}\right)$$

を得る． $\bar{\delta}$ を固定して $k\downarrow 0$ ならしめれば，離差は無限大になるが，このような手続きは数値計算では意味がない．数値計算では k を固定したとき $\bar{\delta}$ を十分小さくとれば離差がいくらでも小さくできることが重要で，このことは安定条件のもとで達せられることがわかる．

§3 に述べた特別な場合には，

(63) $$P_n^{(0)} = T^{-1}\tilde{P}_n^{(0)}T = \frac{2}{M+1}\, T\tilde{P}_n^{(0)}T$$

で，ここに $\|T\| \leqq M$ と見積られるから

(64) $$\|P_n^{(0)}\| \leq \frac{2M^2}{M+1}\|\tilde{P}_n^{(0)}\| .$$

この特別な場合には

(65) $$|\rho_{j,s}| \leqq 1 \qquad (j=1,\ldots,M;\ s=1,\ldots,m+1)$$

と， $\rho_{j,s}$ $(s=1,\ldots,m+1)$ が相異なることが安定のために十分であることが示され， $\tilde{P}_n^{(0)}$ に対する一様有界性

(66) $$\|\tilde{P}_n^{(0)}\| \leqq A$$

と $P_n^{(0)}$ の行動

(67) $$\|P_n^{(0)}\| = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

が得られる．