数理解析研究所講究録
第 25 巻 1967 年 93-104

有限幾何と実験計画

広島大理　山本純恭
海上保安大　福田悌次郎
広島大理　浜田昇

1 序

C. R. Rao [2], [3] は R. C. Bose の Difference theorems [1] と呼ばれる定理を一般化し，BIBD を巡回的に生成する difference sets の構成法を発表した。一つのガロア体 GF(m) 上の有限 t 次元射影空間 PG(t, m) 及びユークリッド空間 EG(t, m) において，点の全体を treatments，d(< t) 次元線形部分空間（d-flat）の全体を blocks にとると BIBD が得られることは周知の通りであるが [1]，Rao は一般化された difference theorems を用いてこれらの designs を組織的に作るために，d-flat に cycle という概念を導入して d-flats の全体を類別し，その構造定理を次のように述べた。

Proposition 1 (Rao)

PG(t, m) において $r_1, r_2, \cdots, r_p$ を次の条件をみたす正整数とする。

(a) $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_p < t$,

(b) $(m^{d+1}-1)/(m^{r_i+1}-1) = s_i$ は正整数，

(c) $(d+1)/(r_i+1) = t_i$ 　は正整数，

(d) $(r_{i+1}+1)/(r_i+1) = l_i$ 　〃　，

(e) $(m^{t+1}-1)/(m^{r_i+1}-1) = \theta_i$ 　〃　．

すると，$y_i=(n_i-n_{i+1})/\theta_i$ 個の cycle θ_i $(i=1,2,\cdots,p)$ の initial flats と $\eta=(b-n_1)/v$ 個の cycle v の initial flats が存在し，d-flats の全体はこれらの initial flats から生成される。ここに，$n_i=\binom{\theta_i}{t_i}\Big/\binom{s_i}{t_i}$ であり，v と b はそれぞれ PG(t,m) における点と d-flats の個数である。

Proposition 2 (Rao)

EG(t,m) において $h=p_0 p_1^{i_1} p_2^{i_2}\cdots$ ($p_0=1$，p_i は $p_i<p_{i+1}$ をみたす素数）を d と t との最大公約数とすると，原点 (0) を通る d-flats は $\theta_{js}=(m^t-1)/(m^{r_{js}}-1)$ なる形の cycles をもち，cycle θ_{js} の initial flats の個数は

$$(n_{js}-n_{j+1,s+1})/\theta_{js}$$

である。そして原点を通る d-flats の全体はこれらの initial flats から生成される。ここに $r_{js}=p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_j^{s}$ $(j=0,1,\cdots;s=0,1,\cdots i_j)$，
$n_{js}=\binom{\theta_{js}}{d/r_{js}}\Big/\binom{q_{js}}{d/r_{js}}$，$q_{js}=(m^d-1)/(m^{r_{js}}-1)$．

しかしながら，これらの Propositions は特別の場合を除いて一般には成立しない。この論説の目的の一つはこれらの構造定理を修正することである。今一つの目的は v より小さいある cycle θ の d-flats のみを blocks にとることにより一つの PBIBD が得られること，更に，

cycle もつ d-flats 上の点の一部のみを treatments にとることにより一つの BIBD が得られることを示すものである。これらの考察から，$PG(t, m=p^n)$ における d-flats の全体から作られる BIBD（今後これを $PG(t,m):d$ で表わす）は $PG(\tilde{t},p)$ における $\tilde{d}$-flats の全体から作られる BIBD $PG(\tilde{t},p):\tilde{d}$ において，blocks の一部及び treatments の一部をカットすることによっても得られることがわかる。ここに，$\tilde{t}=n(t+1)-1$，$\tilde{d}=n(d+1)-1$．

以下主要結果を述べる。詳細については [4] を参照されたい。

2. $PG(t,m)$ における d-flats

［定義］ ガロア体 $GF(m=p^n)$ 上の t 次元射影空間 $PG(t,m)$ とは次の条件をみたす点の集合である．

(a) $GF(m^{t+1})$ の非零元 ν を点と考えて (ν) で表わす．

(b) 2点 (ν) と (μ) とは $\mu=\sigma\nu$ なる $\sigma\neq 0\in GF(m)$ が存在するときに限り同一点を表わす．

(c) $(\nu_0),(\nu_1),\cdots,(\nu_d)$ を係数体 $GF(m)$ に関して一次独立な点とするとき，点 $(a_0\nu_0+a_1\nu_1+\cdots+a_d\nu_d)$ の全体を d-flat という。ただし $a_i\in GF(m)$ であり，同時に 0 となることはないものとする．

特に 0-flat を点，1-flat を直線，2-flat を平面と呼ぶ．

［定義］ x を $GF(m^{t+1})$ の原始元の一つとすると，x は $GF(m)$ を係数域とする $t+1$ 次の minimum function $f(x)=x^{t+1}+a_tx^t+\cdots+a_1x+a_0$ の零点であり，$GF(m^{t+1})$ の非零元は $x^k\ (k=0,1,2,\cdots,m^{t+1}-2)$ の形で

表わされる。 これをxによるべき表現という[1],[2]。

$(t+1)/(i+1)$が正整数のときは $\theta=(m^{t+1}-1)/(m^{i+1}-1)$ とおくと，x^{θ}は$GF(m^{i+1})$の原始元であるから 次の表現を得る：

$$GF(m^{i+1})=\{0,\ x^{0},\ x^{\theta},\ \cdots,\ x^{(m^{i+1}-2)\theta}\},$$

$$PG(i,m)=\{(x^{0}),(x^{\theta}),\cdots,(x^{(\frac{m^{i+1}-1}{m-1}-1)\theta})\}.$$

特に $i=0$のとき

$$GF(m)=\{0,\ x^{0},\ x^{\nu},\ \cdots,\ x^{(m-2)\nu}\},$$

$$PG(t,m)=\{(x^{0}),(x^{1}),(x^{2}),\cdots,(x^{\nu-1})\}.$$ ただし，$\nu=\dfrac{m^{t+1}-1}{m-1}$.

また，x^{θ}が$GF(m^{i+1})$の原始元であることから $PG(i,m)$の点の中で最初の $i+1$ 個の点 $(x^{0}),(x^{\theta}),\cdots,(x^{i\theta})$が 係数体$GF(m)$に関して一次独立であることがわかる。

〔定義〕 一次独立な$d+1$個の点 $(x^{b_0}),(x^{b_1}),\cdots,(x^{b_d})$ を通る d-flat $V_d(0)=\{(a_0x^{b_0}+a_1x^{b_1}+\cdots+a_dx^{b_d})\}$ 及び ある正整数cに対して $V_d(c)=\{(a_0x^{b_0+c}+a_1x^{b_1+c}+\cdots+a_dx^{b_d+c})\}$ なる d-flatを考える。

$V_d(c)=V_d(0)$ なる正整数cを initial flat $V_d(0)$ の cycle という[2]。

$V_d(\nu)=V_d(0)$ であるから，νは常に任意の d-flat $V_d(0)$ の cycles の一つである。 $V_d(0)$ の cycles の中で最小値を minimum cycle と呼び，m.c. と略記する。

$V_d(0)$ の m.c. をθとすれば， $V_d(1),V_d(2),\cdots,V_d(\theta-1)$ も m.c. θをもつから これらθ個の flats を m.c. θ の initial d-flat $V_d(0)$ から generate される d-flats という。

これらの定義と minimum cycles の性質[2]から次の定理を得る。

〔定理1〕 $\theta_i=(m^{t+1}-1)/(m^{i+1}-1)$ が正整数ならば，$V_i(0)=\{(a_0x^0+a_1x^{\theta_i}+\cdots+a_ix^{i\theta_i})\}$ は m.c. θ_i の i-flat である。

〔定理2〕 一つの d-flat V_d が v より小さい m.c. θ をもつならば，θ は $\theta=(m^{t+1}-1)/(m^{j+1}-1)$ なる形である。ここに $j+1$ は $t+1$ と $d+1$ との公約数である。 この場合 V_d は m.c. θ の j-flat $V_j(0)=\{(a_0x^0+a_1x^{\theta}+\cdots+a_jx^{j\theta})\}$ から generate される θ 個の j-flats の中の $(m^{d+1}-1)/(m^{j+1}-1)$ 個から成る。

〔定義〕 $i+1$ を $t+1$ と $d+1$ との公約数の一つとすると，m.c. $\theta_i=(m^{t+1}-1)/(m^{i+1}-1)$ の i-flat $V_i(0)=\{(a_0x^0+a_1x^{\theta_i}+\cdots+a_ix^{i\theta_i})\}$ から generate される θ_i 個の flats の中から $d_i+1=(d+1)/(i+1)$ 個の flats を選び出し，各 flats 上の一次独立な $i+1$ 個ずつ合計 $d+1=(i+1)(d_i+1)$ 個の点が一次独立となるようできる。 これら $d+1$ 個の点によって張られる flat を d_i+1 個の一次独立な m.c. θ_i の i-flats から作られる d-flat と呼び，"d(i)"-flat と書く。 特に，$i=0$ の場合，即ち，d-flat V_d が $d+1$ 個の 0-flats からできているとき，その flat も形式的に "d(0)"-flat と書くことにする。

すると定義から，定理2で述べた flat は一つの d(j)-flat であることがわかる。

〔定理3〕 (1) m.c. v をもつ d-flat は常に存在する。

(2) $j+1$ が $t+1$ と $d+1$ との公約数であるような正整数 j が存在するならば，$\theta_j=(m^{t+1}-1)/(m^{j+1}-1)$ を m.c. とする d-flat が存在する。

〔定理4〕 $j+1$ が $t+1$ と $d+1$ との公約数であり，かつ，V_d が $\theta_j=(m^{t+1}-1)/$

$(m^{j+1}-1)$ を m.c. にもつ d-flat ならば，V_d は一つの d(j)-flat であるばかりでなく，i+1 が j+1 の約数であるような正整数 i または i=0 に対して d(i)-flat ともみなすことができる．

この定理から d(i)-flats の全体は m.c. θ_i の d-flats のみならず，θ_i の約数であるような θ_j に対して m.c. θ_j の d(j)-flats をも含むことがわかる． よって m.c. θ_i の d(i)-flats の個数 n_i^* は d(i)-flats の個数 n_i から，かかる d(j)-flats の個数 n_j^* をすべて引くことによって求まる．

さて，n_i は次の定理によって計算される．

［定理 5］ d(i)-flats の個数は $n_i=\phi(t_i, d_i, m^{i+1})$ である．
ここに $t_i=\frac{t+1}{i+1}-1$，$d_i=\frac{d+1}{i+1}-1$ であり，$\phi(t,d,m)$ は PG(t,m) における d-flats の個数を表わす関数で次式で与えられる［1］：

$$\phi(t,d,m)=\frac{(m^{t+1}-1)(m^{t}-1)\cdots(m^{t-d+1}-1)}{(m^{d+1}-1)(m^{d}-1)\cdots(m-1)}.$$

以上をまとめて，Proposition 1 (Rao) に対応する次の general theorem を得る．

［定理 6］ (1) t+1 と d+1 とが互に素ならば，PG(t,m) におけるすべての d-flats は m.c. v をもち，$\eta=\phi(t,d,m)/v$ 個の initial d-flats から generate される．

(2) $(t+1, d+1)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ (>1, p_i は $p_i<p_{i+1}$ をみたす素数)を t+1 と d+1 との最大公約数とすると，異なる m.c. の個数は $\prod_{i=1}^{\ell}(1+\alpha_i)$ である． 今 ．

$\theta[x_1,\cdots,x_e]=(m^{t+1}-1)/(m^{p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e}}-1)$, $t[x_1,\cdots,x_e]=(t+1)/(p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e})-1$,

$d[x_1,\cdots,x_e]=(d+1)/(p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e}-1)$, $m[x_1,\cdots,x_e]=m^{p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e}}$

とおくと，$\theta[x_1,\cdots,x_e]$ を cycle 及び m.c. とする $d(p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e}-1)$- flats の個数は それぞれ

$$n(x_1,\cdots,x_e)=\phi(t[x_1,\cdots,x_e],\ d[x_1,\cdots,x_e],\ m[x_1,\cdots,x_e])\ ,$$

$$n^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_e)=n(\alpha_1,\cdots,\alpha_e)\ ,$$

$$n^*(x_1,\cdots,x_e)=n(x_1,\cdots,x_e)-\sum_{x_j\le y_j\le\alpha_j\,;\,\exists j,\,x_j<y_j}n^*(y_1,\cdots,y_e)$$

で与えられる． よって m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_e]$ の initial d-flats の個数は $\eta(x_1,\cdots,x_e)=n^*(x_1,\cdots,x_e)/\theta[x_1,\cdots,x_e]$ であり，これらから m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_e]$ の d-flats の全体が generate される．

3. EG(t, m) における d-flats

[定義] GF(m)上の t 次元ユークリッド空間 EG(t, m) とは次の条件をみたす点の集合である．

(a) $GF(m^t)$ の各元を点と考えて (ν) で表わす． 2点 (ν) と (μ) とは $\nu=\mu$ のときに限り同一点である．

(b) $(\nu_0),(\nu_1),\cdots,(\nu_d)$ を係数体 GF(m) に関して一次独立な点とするとき，点 $(a_0\nu_0+a_1\nu_1+\cdots+a_d\nu_d)$ の全体を d-flat という． ただし，$a_i\in GF(m)$ は $\sum_{i=0}^{d}a_i=1$ という制約条件をみたすものとする．

定義より，EG(t, m) は PG(t, m) から一つの超平面 (t−1)- flat 上のすべての点を取り除いて得られる空間とみなすことができる．このことから EG(t, m) における d-flats の個数は $\phi=\phi(t,d,m)-\phi(t-1,d,m)$

であることがわかる。

次に，x を $GF(m^t)$ の原始元の一つとすると，次のような $EG(t,m)$ の x によるベキ表現を得る：

$$EG(t,m)=\{(0),(x^0),(x^1),\cdots,(x^{m^t-2})\}.$$

$EG(t,m)$ における d-flats の minimum cycles による類別に関しては次の二つの場合が考えられる。

(1) 原点(0)を通らない d-flats

この場合の d-flats はすべて，m.c. $v^*=m^t-1$ をもち，その個数は

$$b_1=b-\phi(t-1,d-1,m)=\phi(t,d,m)-\phi(t-1,d,m)-\phi(t-1,d-1,m).$$

(2) 原点(0)を通る d-flats

原点を通る任意の d-flat は $V_d(0)=\{(a_1x^{b_1}+a_2x^{b_2}+\cdots+a_dx^{b_d})\}$ という形で表わされ，$\sum_{i=0}^{d}a_i=1$ という制約条件は不用となる。さて，$\theta=(m^t-1)/(m-1)$ とおくと原点を通るすべての d-flats は cycles の一つとして θ をもつから，$EG(t,m)$ における原点を通る d-flats の全体は cycles に関しては $PG(t-1,m)$ における $(d-1)$-flats の全体と同じ構造をもつことがわかる。よって定理6の直接的結果として，Proposition 2 (Rao) に対応する次の定理を得る。

[定理7] $(t,d)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ (>1，p_i は $p_i<p_{i+1}$ をみたす素数) を t と d との最大公約数とすると，原点を通る d-flats の m.c. の個数は $\prod_{i=1}^{\ell}(1+\alpha_i)$ である。今

$\theta[x_1,\cdots,x_\ell]=(m^t-1)/(m^{p_1^{x_1}\cdots p_\ell^{x_\ell}}-1)$，　$t[x_1,\cdots,x_\ell]=t/(p_1^{x_1}\cdots p_\ell^{x_\ell})$，

$d[x_1,\cdots,x_\ell]=d/(p_1^{x_1}\cdots p_\ell^{x_\ell})$，　$m[x_1,\cdots,x_\ell]=m^{p_1^{x_1}\cdots p_\ell^{x_\ell}}$

とおくと，原点を通り $\theta[x_1,\cdots,x_l]$ を cycle 及び m.c. とする $d(p_1^{x_1}\cdots p_l^{x_l})$-flats の個数はそれぞれ

$$n(x_1,\cdots,x_l)=\phi(t[x_1,\cdots,x_l]-1,\ d[x_1,\cdots,x_l]-1,\ m[x_1,\cdots,x_l]),$$

$$n^*(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=n(\alpha_1,\cdots,\alpha_l),$$

$$n^*(x_1,\cdots,x_l)=n(x_1,\cdots,x_l)-\sum_{x_j\leq y_j\leq\alpha_j;\ \exists j,\ x_j<y_j} n^*(y_1,\cdots,y_l)$$

で与えられる． よって m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_l]$ の initial d-flats の個数は

$\eta(x_1,\cdots,x_l)=n^*(x_1,\cdots,x_l)/\theta[x_1,\cdots,x_l]$ であり，これらから m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_l]$ の d-flats の全体が generate される．

4. 巡回的に生成される不完備計画の Construction

designs の構成に関しては次の定理が必要である．

［定理8］ 定理6の(2)の条件の下で，2点 (x^{α}) と (x^{β}) とを通る cycle $\theta[x_1,\cdots,x_l]$ の $d(p_1^{x_1}\cdots p_l^{x_l}-1)$-flats の個数 $\lambda_i(x_1,\cdots,x_l)$ は

$\alpha-\beta\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta[x_1,\cdots,x_l])$ のとき

$$\lambda_1(x_1,\cdots,x_l)=\phi(t[x_1,\cdots,x_l]-1,\ d[x_1,\cdots,x_l]-1,\ m[x_1,\cdots,x_l]),$$

$\alpha-\beta\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta[x_1,\cdots,x_l])$ のとき

$$\lambda_2(x_1,\cdots,x_l)=\phi(t[x_1,\cdots,x_l]-2,\ d[x_1,\cdots,x_l]-2,\ m[x_1,\cdots,x_l]).$$

［定義］ $\theta[x_1,\cdots,x_l]<v$ のとき，$PG(t,m)$ の任意の2点 (x^{α}) と (x^{β}) との間に次の関係を定義する．

$\alpha-\beta\equiv 0(\mathrm{mod}\,\theta[x_1,\cdots,x_l])$ のとき　(x^{α}) と (x^{β}) とは 1st associate,

$\alpha-\beta\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\theta[x_1,\cdots,x_l])$ のとき　(x^{α}) と (x^{β}) とは 2nd associate,

任意の点はそれ自身と 0-th associate である。

以上の点の間に定義されたこれらの関係は association scheme のみたすべき条件を満足する。これより次の定理を得る。

[定理9] $PG(t, m)$ において一つの d-flat が v より小さい cycle $\theta[x_1, \cdots, x_\ell]$ をもつならば，$PG(t, m)$ における点の全体を treatments，$d(p_1^{x_1} \cdots p_\ell^{x_\ell} - 1)$ -flats の全体を blocks にとることにより N_2 type (GD type) の PBIBD が得られる。その parameters は次の通りである。

$v = \phi(t, 0, m)$,　$b = \phi(t[x_1, \cdots, x_\ell], d[x_1, \cdots, x_\ell], m[x_1, \cdots, x_\ell])$,

$k = \phi(d, 0, m)$,　$r = \lambda_1(x_1, \cdots, x_\ell)$,　$\lambda_1 = \lambda_1(x_1, \cdots, x_\ell)$,　$\lambda_2 = \lambda_2(x_1, \cdots, x_\ell)$,

$n_0 = 1$,　$n_1 = r(x_1, \cdots, x_\ell) - 1$,　$n_2 = r(x_1, \cdots, x_\ell)\{\theta[x_1, \cdots, x_\ell] - 1\}$,

ただし　$r(x_1, \cdots, x_\ell) = v / \theta[x_1, \cdots, x_\ell]$

$$\begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(x_1, \cdots, x_\ell) - 2 & 0 \\ 0 & r(x_1, \cdots, x_\ell)\{\theta[x_1, \cdots, x_\ell] - 1\} \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r(x_1, \cdots, x_\ell) - 1 \\ r(x_1, \cdots, x_\ell) - 1 & r(x_1, \cdots, x_\ell)\{\theta[x_1, \cdots, x_\ell] - 2\} \end{bmatrix} .$$

[定理10] 定理9で得られた design において，原始元 x のべきの指数が $\theta[x_1, \cdots, x_\ell]$ より小さい点のみを treatments にとれば，次の parameters をもつ BIBD が得られる。

$v^* = \theta[x_1, \cdots, x_\ell] = \phi(t[x_1, \cdots, x_\ell], 0, m[x_1, \cdots, x_\ell])$,

$b^* = \phi(t[x_1, \cdots, x_\ell], d[x_1, \cdots, x_\ell], m[x_1, \cdots, x_\ell])$,

$k^* = \phi(d[x_1, \cdots, x_\ell], 0, m[x_1, \cdots, x_\ell])$,

$r^* = \phi(t[x_1, \cdots, x_\ell] - 1, d[x_1, \cdots, x_\ell] - 1, m[x_1, \cdots, x_\ell])$,

$\lambda^* = \phi(t[x_1,\cdots,x_\ell]-2,\ d[x_1,\cdots,x_\ell]-2,\ m[x_1,\cdots,x_\ell])$.

次の定理は定理10の系として得られる結果で，実際に幾何学的BIBDを作る際有力な方法を示すものである．

〔定理11〕 $\tilde{t}=n(t+1)-1$，$\tilde{d}=n(d+1)-1$ とおくとき Design PG$(t, m=p^n)$:d は Design PG$(\tilde{t}, p)$:$\tilde{d}$ において，GF$(p^{\tilde{t}+1})$ の原始元 x のベキの指数が $\theta=\phi(t,0,m)$ より小さい点のみを treatments に，cycle θ の $\tilde{d}$-flats のみを blocks にとることによって得られる．

幾何学的不完備計画を巡回的に生成する difference sets を実際に作るには，m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_\ell]$ の $\eta(x_1,\cdots,x_\ell)$ 個の initial d-flats 上の点 $\{(x^{d_{ij}} \mid i=1,2,\cdots,\eta(x_1,\cdots,x_\ell)\ ;\ j=1,2,\cdots,k\}$ を各 $\theta[x_1,\cdots,x_\ell]$ 毎に，x のベキの指数 $\{d_{ij} \mid i=1,2,\cdots,\eta(x_1,\cdots,x_\ell)\ ;\ j=1,2,\cdots,k\}$ でおきかえればよい． EG(t,m) においては $v=v^*+1=m^t$ 個の点があるから，原点(0)に対して若干の修正が必要である．即ち，原点(0)には記号 ∞ を対応させ $\infty+a=\infty$ $(a=0,1,2,\cdots,v-2)$ なる性質を持たせることにする．すると，すべての $\theta[x_1,\cdots,x_\ell]$ に対して得られた m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_\ell]$ の difference sets $\{d_{ij}\}$ の全体は BIBD PG(t,m):d 及び BIBD EG(t,m):d を生成する[2]．

cycle $\theta[x_1,\cdots,x_\ell]$ の difference sets のみを考えると定理9で述べた PBIBD が得られるし，更に，この difference sets で cycle $\theta[x_1,\cdots,x_\ell]$ より小さい整数のみから成る部分集合の族を考えると 定理10で述べた BIBD が得られる．

参考文献

[1] Bose,R.C.(1939). On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics 9 353-399.

[2] Rao,C.R.(1945). Finite geometries and certain derived results in theory of numbers. Proc. Nat. Inst. Sci. India 11 136-149.

[3] Rao,C.R.(1946). Difference sets and combinatorial arrangements derivable from finite geometries. Proc. Nat. Inst. Sci. India 12 123-135.

[4] Yamamoto,S.,Fukuda,T.and Hamada,N.(1966). On finite geometries and cyclically generated incomplete block designs. J.Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-1 30 137-149.