数理解析研究所講究録
第27巻 1967年 89-92

a priori distribution についての情報がある場合の inadmissibility について

大崎紘一（岡大工）

§1. 序.

X, Θ, どちらも確率変数で直線上に分布しており

$$P(X \leqq t \,/\, \Theta = \theta) = \int_{-\infty}^{t} f(x, \theta)\, dx$$

ここで
$$f(x, \theta) = 1/\sqrt{2n\pi}\; exp(-(x-n\theta)^2/2n)$$

ν : Θに関して直線上の a priori 累積分布函数

$L(\Theta, a) = (a-\Theta)^2$: 損失函数

νに関する情報としては次のようなものを考える。

for $\forall \alpha > 0$, $0<\alpha<1$, for fixed $\alpha, \delta > 0$.

$$\mathfrak{M}(\delta, \alpha) = \{ \nu \,/\, \nu(\delta) - \nu(-\delta-0) \geqq 1-\alpha \}$$

この$\mathfrak{M}(\delta, \alpha)$内の任意の$\nu$に関して、$\Theta$の不偏推定量 x/n より一様に良い推定量ξが存在して

$$E_\nu(\xi - \Theta)^2 < E_\nu(x/n - \Theta)^2 \quad \text{for all } \nu \in \mathfrak{M}(\delta, \alpha)$$

となる。すなわち、x/n がΘに対して admissible な推定量でなくなる。

§2. ξについて.

$P(X \leqq t \,/\, \Theta = \theta)$ とフビニの定理より、

$$P_\nu(X \leqq t) = E_\nu(P(X \leqq t \,/\, \Theta = \Theta)) = \int_{-\infty}^{t} E_\nu(f(x, \Theta))\, dx.$$

種々の x に対して、次の式を満たす $\nu_x \in \mathfrak{M}(\delta, \alpha)$ を選ぶ。

$$E_{\nu_x}(f(x,\Theta)) \geqq E_{\nu}(f(x,\Theta)) \quad \text{for all } \nu \in \mathfrak{M}(\delta,\alpha) \quad \cdots\cdots ①$$

$f(x,\cdot)$ は x/n で最大値をとり、その両側で単調である。

$$P_{\nu_x}(\Theta = x/n) = \alpha, \quad P_{\nu_x}(\Theta = \delta\, \mathrm{sig}\, x) = 1-\alpha, \quad |x| > n\delta$$

$$P_{\nu_x}(\Theta = x/n) = 1 \qquad\qquad |x| \leqq n\delta$$

ν_x を上の様に定義すれば $\nu_x \in \mathfrak{M}(\delta,\alpha)$ で、① 式を満たす。

次に $P_{\nu_x}(\Theta = \theta / X = x) = P_{\nu_x}(\Theta = \theta) f(x,\theta) / E_{\nu_x}(f(x,\Theta))$ を最大にする θ の推定量を求めそれを $\hat{\theta}_{\delta\alpha}$ とする。

ν_x の定義のし方より、右辺の分子は

$$|x| > n\delta, \qquad P_{\nu_x}(\Theta=\theta) f(x,\theta) = \begin{cases} \alpha f(x, \frac{x}{n}) & \theta = x/n \\ (1-\alpha) f(x, \delta\, \mathrm{sig}\, x), & \theta = \delta\, \mathrm{sig}\, x \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$|x| \leqq n\delta \qquad P_{\nu_x}(\Theta=\theta) f(x,\theta) = \begin{cases} f(x, x/n) & \theta = x/n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。よって $\eta(x,\delta) = f(x, x/n) / f(x, \delta\, \mathrm{sig}\, x)$ とおくと、

$\eta(x,\delta)$ が $1-\alpha/\alpha$ より大きいか小さいかにより $\hat{\theta}_{\delta\alpha}$ を次の様に決める。

$$\hat{\theta}_{\delta\alpha} = \begin{cases} \delta\, \mathrm{sig}\, x & n\delta \leqq |x| \leqq n\delta + (2n \log 1-\alpha/\alpha)^{\frac{1}{2}} \\ x/n & \text{その他} \end{cases} \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}$$

$$\hat{\theta}_{\delta\alpha} = x/n \qquad \tfrac{1}{2} < \alpha < 1$$

さらに、ξ_r, $r > 0$ を次のごとく定義する。

$$\xi_r(X) = \begin{cases} \delta\, \mathrm{sig}\, X & n\delta \leqq |X| \leqq n(\delta + r) \\ X/n & \text{その他} \end{cases}$$

ここで $\alpha = 1/1+\exp\frac{nr^2}{2}$ で $r > 0$ ならば $\xi_r(X) = \hat{\theta}_{\delta\alpha}$

§3 x/n の inadmissibility について

$$E_\nu(\xi_r - \Theta)^2 - E_\nu(x/n - \Theta)^2 = E_\nu(H_r(\Theta)) \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{for all } \nu \in \mathcal{M}(\delta, \alpha)$$

とおく。$\Theta = \theta$ と固定すれば

$$H_r(\theta) = h_r(\theta) + h_r(-\theta)$$

但し $h_r(\theta) = 1/\sqrt{2\pi n} \int_{n\delta}^{n(\delta+r)} (\delta - x/n)(\delta + \frac{x}{n} - 2\theta)\, e^{-\frac{(x-n\theta)^2}{2}} dx$

とすれば $H_r(\theta)$ は次の条件を満たす。

(イ) $H_r(\theta) = H_r(-\theta)$

(ロ) for every $r > 0$. $|\theta| < \delta$ ならば

$$H_r(\theta) < 0$$

(ハ) $|\theta| > \delta$ で θ が十分大きければ

$$H_r(\theta) > 0 \quad \text{又} \quad H_r(\theta) \to 0 \quad \text{as } \theta \to \infty$$

これらは $H_r(\theta) = \sqrt{2n/\pi} \int_\delta^{\delta+r} (\delta - x)\{(\delta + x)\cosh nx\theta - 2\theta \sinh nx\theta\}$

$$\times \exp\{-n^2(x^2+a^2)/2\} \cdot dx$$

となる事より示される。

以上により $E_\nu(H_r(\Theta)) = \int_{|\Theta|>\delta} H_r(\Theta) d\nu(\Theta) + \int_{|\Theta|<\delta} H_r(\Theta) d\nu(\Theta)$

$$\leq \max_{|\theta|>\delta} H_r(\theta) \cdot \alpha + (1-\alpha) \max_{|\theta|<\delta} H_r(\theta)$$

$$= \max_{|\theta|<\delta} H_r(\theta) + \alpha(\max_{|\theta|>\delta} H_r(\theta) - \max_{|\theta|<\delta} H_r(\theta))$$

よって $\alpha > 0$ を十分小さくとれば $E_\nu(H_r(\Theta)) < 0$ --- (3)

(2), (3) 式より

$$E_\nu(\xi_\gamma - \Theta)^2 - E_\nu(x/n - \Theta)^2 < 0 \qquad \text{for all } \nu \in \mathfrak{M}(\delta, \alpha)$$

故に $\mathfrak{M}(\delta, \alpha)$ に関して，x/n よりも一様に良い推定量 ξ_γ が存在する事がわかった。

さらに γ のとり方により次の事がわかる。α が与えられた時の γ の値を γ_0，任意に2つの γ_1, γ_2 を $0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leqq \gamma_0$ ととれば，

$$E_\nu(\xi_{\gamma_2} - \Theta)^2 - E_\nu(\xi_{\gamma_1} - \Theta)^2 = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int d\nu(\Theta) \int_{\delta+\gamma_1}^{\delta+\gamma_2} (\delta - x)\{(\delta + x)\cosh nx\Theta - 2\Theta \sinh n\Theta x\} e^{-\frac{n^2(x^2+\Theta^2)}{2}} dx$$

となり，許容でない事を示したと同様にして，

$$E_\nu(\xi_{\gamma_2} - \Theta)^2 - E_\nu(\xi_{\gamma_1} - \Theta)^2 < 0 \qquad \text{for all } \nu \in \mathfrak{M}(\delta, \alpha)$$

よって，$\xi_{\gamma_2}(X)$ の方が $\mathfrak{M}(\delta, \alpha)$ に関して $\xi_{\gamma_1}(X)$ よりも一様に良い推定量になる。だから，$\xi_{\gamma_0} = \hat{\theta}_{\delta,\alpha}(X)$ が $\mathfrak{M}(\delta, \alpha)$ に関してもっとも良い推定量となることが言える。

又 $f(x, \theta) = {}_nC_x\, \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ の場合についても同様な事が言える。この場合は離散型であるから，ξ_j は次の様に定義出来る。

$$\xi_j(X) = \begin{cases} \delta & j \leqq x \leqq b \\ 1-\delta & n-b \leqq x \leqq n-j \\ x/n & \text{その他} \end{cases}$$

Reference.

M. Skibinsky and L. Cote : "On the inadmissibility of some standard estimates in the presence of prior information"; Annals of Math., Stat., (1963) Vol.34, P539–P548