数理解析研究所講究録
第 34 巻 1967 年 27-36

微分方程式の数値解法と Liapunov 函数について

大阪府大　工　宇本　浩
同志社大　工　井村英夫

§1. 緒言

１９６５年秋の数学会で常微分方程式の数値解法における種々の問題が提起された。(清水辰次郎：「常微分方程式の数値解法における数学的諸問題」) その中で,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0$$

という微分方程式の数値解法において，項の間に著しい大小の差があるときの刻み巾が問題にされた。特に

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0$$

$$t=0 \text{ のとき } x=2,\quad \frac{dx}{dt}=0$$

という van der Pol の方程式の解は $x=2$ より $x=1$ (又は $x=-2$ より $x=-1$) までの水平部分で t は約 $k(\frac{3}{2}-\log 2)$ 変化し，$x=1$ から $x=-2$ (又は $x=-1$ から $x=2$) までの垂直部分で t の変化は殆んど 0 である。したがって，数値解法において，刻み巾を十分小にしないと垂直部分の計算は出

来ない。しかし，垂直部分の計算に必要なだけ刻み巾を十分小にすれば，$k=100$ というような大きな場合水平部分の計算に時間がかゝりすぎる。したがつて，刻み巾を場所により変えねばならない必要が生ずることを指摘された。

この刻み巾を変化させる必要は $2\frac{dx}{dt}=x^3$，$t=0$ のとき，$x=1$ とか，$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2x}$，$t=0$ のとき $x=1$ でも生ずる。これらの方程式の真の解はそれぞれ $x=(1-t)^{-\frac{1}{2}}$，$x=(1-t)^{\frac{1}{2}}$ であるが，刻み巾によつては t の1より大きな値に対しても計算は続行される。そして，この刻み巾を場所により変える必要性の原因は方程式の特異点によるのではなく，方程式の非線形性によるものであるから，あらかじめどこで刻み巾を変えるべきかは知ることは出来ない。

刻み巾を変える方法として，

(1) 刻み巾を h とし，t_n における値より t_n+h における値を計算し，$t_n+\frac{h}{2}$，$t_n+h-\frac{h}{2}$ のおのおのにおける値に差が生ずるか否かを検討して，刻み巾を変える。（清水辰次郎：前記の講演の予稿集）

(2) 反復型の公式で，打切り誤差の程度を修正値より予測値を差引いた値によつて判定し，刻み巾を半分又は倍にする。（高田勝：「van der Pol の式の数値積分」，森口繁一他：「常微分方程式の数値解法における難問対策へのある試み」共に

第8回プログラミング・シンポジウム報告集(1967))
が考えられ，共に解が得られている。

ここで，刻み巾を変更する一つの方法として，Liapunov の second method を利用することを考える。

§2. Liapunov の second method

A. M. Liapunov は微分方程式の解の安定性の問題の研究において，いわゆる Liapunov の second method とよばれる方法を用いた。これは今日では安定性問題のみならず，微分方程式の解の諸性質の研究において重要な方法になっている。

Liapunov は連立微分方程式の解，すなわち Vector 函数の性質をしらべるに際し，Liapunov 函数とよばれる実数値をとる一つの函数の性質を利用した。そして，解のどのような性質をしらべるかに応じて，Liapunov 函数に種々の性質が假定される。

連立微分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.1}$$

とする。ここで，x は n-vector であり，$f(t,x)$ は (t,x) 空間で連続な n-vector 函数とする。この方程式に対し，ある開集合Sで定義された一つの連続函数 $V(t,x)$ を考え，$V(t,x)$ は x に関して局所的に Lipschitz の条件をみたすものとする。この $V(t,x)$ に対し，函数 $\dot{V}(t,x)$ を次の

式で定義する。

$$\dot{V}(t, x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)\}$$

$V(t, x)$ が t と x とに関し，連続な偏導函数をもつとき，

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x)$$

である。ここで，・は scalar 積を示す。

$x(t)$ を S の中にある (2.1) の解とする。そのとき，$V(t, x(t))$ は t に関し微分可能で

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \cdot f(t, x(t)) \qquad (2.2)$$

である。微分方程式の解の諸性質をしらべるのに $V(t, x)$，$\dot{V}(t, x)$ の性質よりしらべるのが Liapunov の second method であり，その函数 $V(t, x)$ を Liapunov 函数という。

§3　数値解法と Liapunov 函数

連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (3.1)$$

の $t = t_0$ のとき $x = x_0$ という初期条件の下での数値解法を考える。ここで，x は vector，$f(x)$ は連続な vector 函数とする。

刻み巾を決定する問題を考えているのであるから，数値解法のために使う公式の精度，収束とか丸めの誤差の問題にはふれないことにする。すなわち，$t = t_n$ に対する x の値は真の値として求められたとし，次の $t = t_{n+1}$ に対する x の値を

考えている精度以上の近似値として求めるための刻み巾の決定について考える。

x_n を $t=t_n$ に対し求まった真の値とすれば

$$x = x_n + f(x_n)(t-t_n)$$

は (t_n, x_n) を通る直線を示し，一つの正数 h に対し，

$$\overline{x_{n+1}} = x_n + f(x_n)h$$

は $t_{n+1} = t_n + h$ に対する x_{n+1}（真の値）の近似値である。

ここで，$V(x)$ を一つの開集合 S で定義された連続函数とし，局所的に Lipschitz 条件をみたすとする。考えている初期条件の下での (3.1) の解 $x(t)$ が S に止まっているとすれば，小さな正の数 h に対し，$\overline{U} \subset S$，$x_{n+1} \in U$ 且つ $\overline{x_{n+1}} \in U$ であるような x_n の近傍 U が存在する。

そのとき，

$$V(x_{n+1}) - V(\overline{x_{n+1}}) \leqq L \| x_{n+1} - \overline{x_{n+1}} \| \qquad (3.2)$$

である。ここで，L は x に関する $\overline{U}$ における $V(x)$ の Lipschitz の定数を示し，$\| \quad \|$ は Euclid norm を示す。

いま，数値解法を考えているのであるから，$f(x)$，$V(x)$ の微分可能性を必要なだけ假定しておけば，$\frac{dV}{dt}$，$\frac{d^2V}{dt^2}$，$\frac{d^3V}{dt^3}$ 等が (2.2) の関係式を用いて，計算出来る。

一方，$x(t)$ に関し $t=t_n$ の近傍で

$$V(x) = V(x_n) + \frac{dV}{dt}(x_n)(t-t_n) + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dt^2}(x_n)(t-t_n)^2$$

$$+\frac{1}{6}\frac{d^3V}{dt^3}(x(t_n+\theta h))(t-t_n)^3 \quad (0<\theta<1)$$

である。

したがつて，

$$V(x_{n+1})=V(x_n)+\frac{dV}{dt}(x_n)h+\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dt^2}(x_n)h^2+O(h^3)$$

が成立するから，$t=t_n$ における x_n により，

$$V(x_{n+1})-V(\overline{x_{n+1}})$$

は h^2 の項まで計算可能である。

(3.2) より，$|V(x_{n+1})-V(\overline{x_{n+1}})|$ が大きければ，$\|x_{n+1}-\overline{x_{n+1}}\|$ は大きくなる。したがつて，$\overline{x_{n+1}}$ が真の値に近い値になるためには

$$V(x_{n+1})-V(\overline{x_{n+1}})$$

が十分小であることが希ましい。この値が大きなときは，$\overline{x_{n+1}}$ に大きな誤差が入り，真の解より遠ざかつている。

したがつて，刻み巾 h を定める判定の不等式として，

$$|V(x_{n+1})-V(\overline{x_{n+1}})| \leqq \varepsilon_L \qquad (3.3)$$

をうる。ここで，ε_L は L と必要とする解の精度に関係する小さな正数である。

一旦，h が (3.3) をみたすように定まつた後は，x_{n+1} を求めるためには必ずしも Euler 法による必要はなく，Runge-Kutta 法等他の適当な公式に依つてもよい。すなわち，今問題にしているのは x_n と解いている方程式の形により，h を

定めることであり，次の x_{n+1} を数値解として何によって求めるかは別問題である。

§4. van der Pol の方程式の数値解法

van der Pol の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

を初期条件　$t=0$ のとき，$x=2$，$\frac{dx}{dt}=0$ で考える。

これは

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - k\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \tag{4.1}$$

$t=0$ のとき，$x=2$，$y=-\frac{2}{3}k$

と同値である。

これに対し，

$$\begin{cases} \overline{x_{n+1}} = x_n - \left\{y_n + k\left(\dfrac{x_n^3}{3} - x_n\right)\right\}h \\ \overline{y_{n+1}} = y_n + x_n h \end{cases}$$

である。

ここで，(4.1) に対し，$V(x, y)$ を次の如く定義する。

$$V(x, y) = x + y \tag{4.2}$$

そのとき，(4.1)，(4.2) に対し，(2.2) より

$$\frac{dV}{dt} = -y - k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + x$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -x + \{k(x^2-1) - 1\}\left\{y + k\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right\}$$

をうる。

一方，

$$V(\overline{x_{n+1}}, \overline{y_{n+1}}) = x_n - \left\{ y_n + k\left(\frac{x_n^3}{3} - x_n\right)\right\} h + y_n + x_n h$$

であるから，

$$V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(\overline{x_{n+1}}, \overline{y_{n+1}})$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x_n + \{k(x_n^2 - 1) - \}\left\{ y_n + k\left(\frac{x_n^3}{3} - x_n\right)\right\}\right] h^2 + O(h^3)$$

である。

考えている $V(x+y)$ に対する Lipschitz の定数は1であるから，刻み巾を定める判定の不等式として，

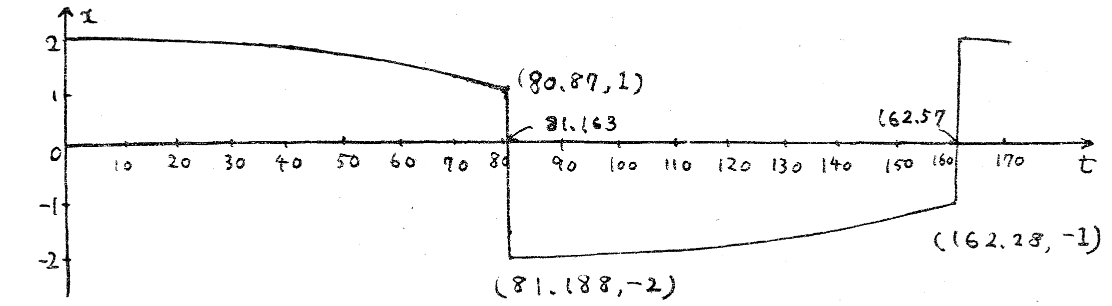
$$\left| \frac{1}{2}\left[-x_n + \{k(x_n^2 - 1) - 1\}\left\{ y_n + k\left(\frac{x_n^3}{3} - x_n\right)\right\}\right] h^2 \right| < \varepsilon \qquad (4.3)$$

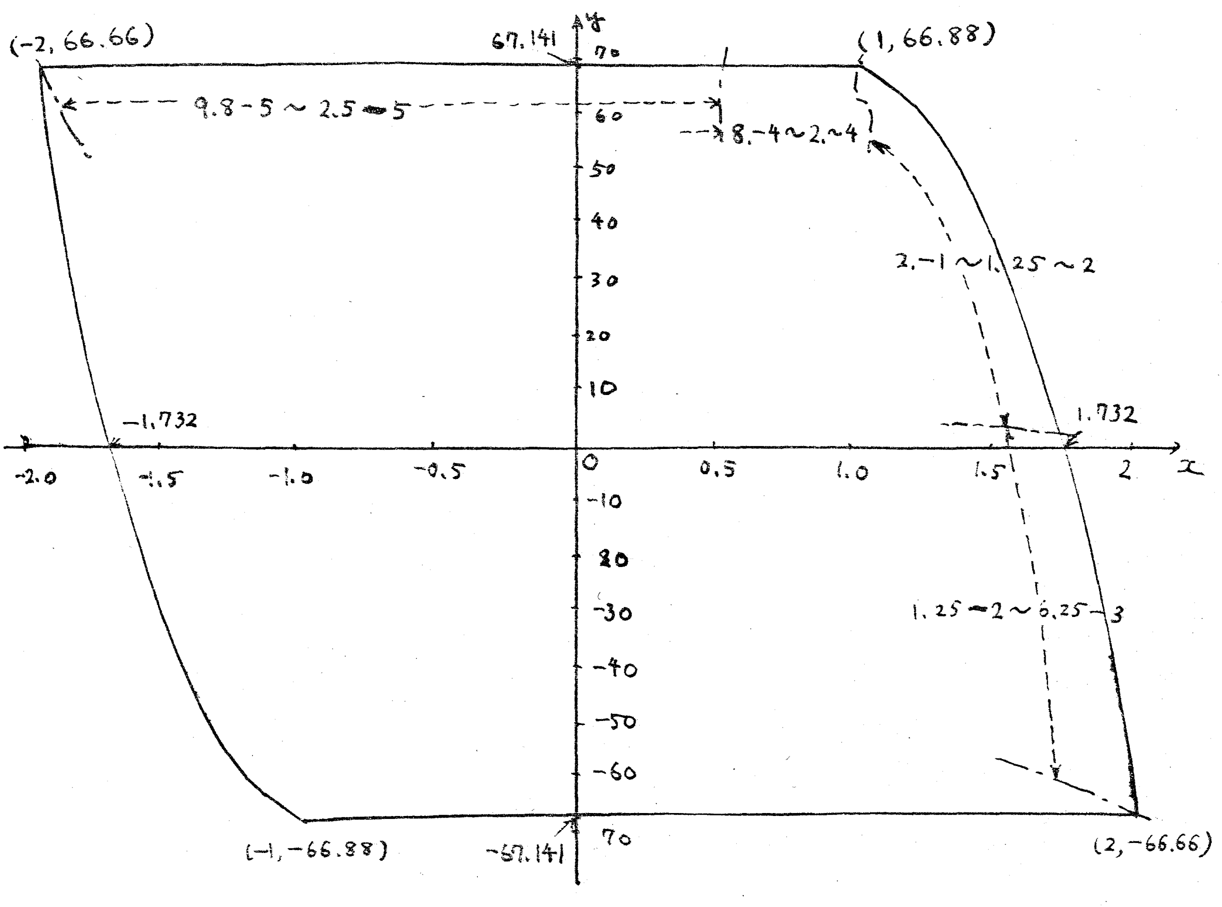
をうる。ここで，ε は求めている解の精度によって決定する定数で，Lipschitz の定数には関係しない。

実際に計算するときは，$t = 0$ のとき，$x = 2$，$y = -\frac{2}{3}k$ とし，$h = 0.1$ より考えて，(4.3) をみたさないときは h をみたすまで半減してゆき，みたす h に対し，適当な数値解法の公式を利用て，次の x，y の値を求め，その後で h を2倍にして同じ操作を行い次々に x，y の値をもとめてゆく。そして，$2\frac{dx}{dt} = x^3$ のような方程式も考慮しておくために，h がある値より小さくなったときは計算機を止めるようにプログラムを作っておく。

この方針の下で，$k = 100$，$\varepsilon = 0.0001$ に対し，HIPAC 103 で行った実験結果を次の図で示す。出力は

直前の印刷値に対し，xが0.01，yが1変化のいずれかの時に行なわせた。印刷時間を含め1周期の計算に要した時間は1時間2分である。尚，数値解法にはEuler法を用いた。





図で点線間の数はhの大きさを示している。ただし，2.5−5等は 2.5×10^{-5} を表わすものとする。

§5. 他の例

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}x^3$，$t=0$ のとき $x=1$ に対し，$V(x)=x$ とすれば，hを定める式は

$$\frac{3}{8}|x^5|h^2<\varepsilon$$

である。$\varepsilon=0.00001$ とし，数値解法に対してはRunge-Kutta法を用いて計算すれば，最初は $h=0.00312$ で計算してゆき，$t=0.9999$ に対し，$h=5\times10^{-8}$ で $x=100.027$ をうる。(このとき解は $x=\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ であるから，$t=0.9999$ に対しては $x=100$ である。) その後hは減少してゆき，計算機はhの制限以下になった所で停止した。

又，$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2x}$，$t=0$ のとき $x=1$ に対しても，$V(x)=x$ とすればhを定める式は

$$\frac{1}{8}\left|\frac{1}{x^3}\right|h^2<\varepsilon$$

である。ε，数値解法の公式は前例と同じにして，計算すれば，最初は $h=0.00625$ で計算をしてゆき，$t=0.999902$ に対して，$h=6.1\times10^{-6}$ で $x=0.00988$ をうる。(このとき解は $x=\sqrt{1-t}$ であるから，$t=0.999902$ に対し，$x=0.00988$ である。) その後，hの制限のため，計算機は停止する。

尚，いずれの場合もhが 10^{-10} より小になれば，計算機を停止させるようにプログラムを組んだ。