数理解析研究所講究録
第63巻 1969年 35-47

3体問題の周期解の摂動に関するArenstorfの結果について

東工大 理　西本敏彦

§1.　最近 Arenstorf は Poincaré の continuation method を適用し平面上の三体問題及び制限3体問題の新しい周期解の存在を示した：

(i) Periodic solutions of the restricted three body problem representing analytic continuations of Keplerian elliptic motions. Amer. J. Math. 85 (1963) 27–35

(ii) A new method of perturbation theory and its application to the satilitte problem of celestial mechanics J. Reine Angew. Math. 221 (1966) 113–145

(iii) New periodic solutions of the plane three body problem corresponding to elliptic motion in the luner theory J. Diff. Eq. 4 (1968) 202–256.

まず制限3体問題の周期解の存在について既によくしられている Poincaré, Liapounov, Birkhoff, および Moser の方

法と結果の概略をのべて Arenstorf の結果と比較する。

§2. 平面上の制限3体問題とは、平面上に3物体 $P_1\ P_2\ P_3$ があり Newton の法則に従って運動しているがその中で第3体 P_3 は質量0で他の2体の運動には影響を与えないとし、更に有限質量の P_1（質量 $1-\mu$）, P_2（質量 μ）は2体問題の特殊解でそれらの重心のまわりを角速度1で一様に円運動をしている場合の P_3 の運動を求めることをいう。単位を適当にとり回転座標系（$P_1\ P_2$ に対する P_3 の相対位置）を用いると $P_3(x_1\ x_2)$ の運動方程式は、（斉藤利弥　解析力学入門　P164）

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_2}{dt} - x_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\frac{dx_1}{dt} - x_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_2} \end{aligned} \qquad U(x_1\ x_2) = -\frac{1-\mu}{x+\mu} - \frac{\mu}{x-1+\mu}$$

又は $x = x_1 + ix_2$ として

$$(1')\quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2i\frac{dx}{dt} - x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{|x+\mu-1|^3}$$

正準方程式に直すと $y_1 = x_1' - x_2 \quad y_2 = x_2' + x_1$ として

$$(2)\quad H(x_1\ x_2\ y_1\ y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + (y_1x_2 - y_2x_1) + U(x_1, x_2)$$

$$(3)\quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2} \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}$$

§3. $\mu = 0$ の場合は P_3 の運動は P_1 との2体問題の解として求められる。P_3 の静止座標系に関する座標 (z_1, z_2) は回転座標系に関する座標 $(x_1\ x_2)$ との間に $x = e^{-it}z \quad (z = z_1 + iz_2)$

という関係がある．z は P_1（原点）を焦点とする円錐曲線であるがここでは円運動と楕円運動の場合を考える．初期条件

(4) $z(0) = a(1+e)$, $z'(0) = ic/z(0)$, $c^2 = a(1-e^2)$

$(a>0, \quad 0 \leq e < 1)$

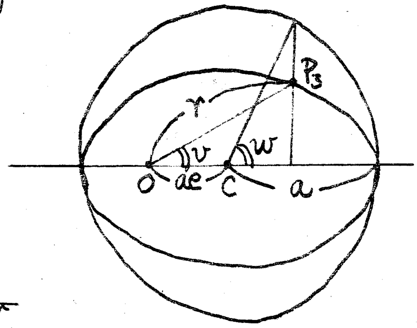
に対する解 $z(t)$ は $z=0$ を焦点とし $2a$ を長径，e を離心率とする楕円軌道を描く．c は Kepler の面積定数で $c >, < 0$ に従って順向，逆向運動となる．

$P_3(z_1\ z_2)$ の運動は

v 真近点離角 (ture anamoly)

w 離心近点離角 (essentric anamoly)

を用いて



$$z_1 = a(e+\cos w) = r\cos v$$

$$z_2 = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin w = r\sin v$$

$$r = (z_1^2+z_2^2)^{1/2} = a(1+e\cos w) = \frac{p}{1-e\cos v}$$

$$t = a^{3/2}(w + e\sin w) \qquad \text{周期 } T_0 = 2\pi a^{3/2} \qquad (p = a(1-e^2))$$

§4. 上記の周期解に対応する $x(t)$ が回転座標系で周期解となるためには T_0 と 2π が適合条件，即ち互いに素な整数 $m>0$, k に対し $a^{3/2} = m/k$ $(\operatorname{sign} k = \operatorname{sign} c)$ をみたすことである．このとき曲線 $x(t)$ は周期 $T^* = 2\pi m$ で $x=0$ の周囲を $k-m$ 回まわったのち閉ぢる．この解を (1) の $\mu=0$ に対する周期解という．問題は $\mu \neq 0$ の場合の周期解の存在である．

第1種周期解. (1)の周期解で $\mu=0$ とすると円軌道になるもの(Poincaré)

第2種周期解 (1)の周期解で $\mu=0$ とすると楕円軌道に対応するもの(Arenstorf)

§5. Liapounov の定理. 方程式(3)からこの力学系の平衡点を求めると次の5点となる(斎藤, 解析力学入門 p167−168)

		x_1	x_2	y_1	y_2
Euler の直線解	m_1	a_1	0	0	a_1
	m_2	a_2	0	0	a_2
	m_3	a_3	0	0	a_3
Lagrange の正三角形解	m_4	$1/2-\mu$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2-\mu$
	m_5	$1/2-\mu$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2-\mu$

但し $a_1 < -\mu < a_2 < 1-\mu < a_3$.

定理(Liapounov) 十分小なる殆んど全ての μ $(0<\mu<1/27)$ に対し各特異点の任意の近傍は無限個の周期解を含む。

この定理は Liapounov の subcenter theorem と、m_1 m_2 m_3 における characteristic exponents は正, 負の実数および共役な純虚数からなり、m_4 m_5 においては $0<\mu<1/27$ のとき共役な2組の純虚数の4根から成ることによる。

§6. 第1種周期解の存在. $\mu=0$ のとき §3 において $e=0$, $a^{3/2} = \pm T_0/2\pi = n_0^{-1}$ とおく。もし $\omega_0^{-1} \equiv (n_0-1)^{-1}$ が次の

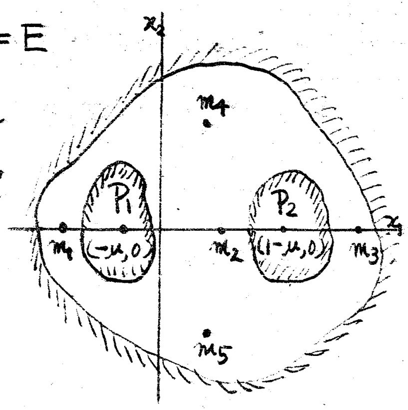
値：$0, -\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \cdots$ をとらなければ、十分小なる $\mu \neq 0$ に対し (1) の周期 $2\pi/\omega_0$ の周期解が存在し $\mu \to 0$ のとき同じ周期の円軌道に收束する．

証明は Poincaré の Continuation method によるが、第2種周期解の存在の Arenstorf の証明と同様だから省略する．

§7．Birkhoff の周期解．エネルギー曲面

$$H \equiv \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)+y_1x_2-y_2x_1+U(x_1,x_2)=E$$

において E を負でその絶対値を十分大にとると、H=E が定める速度零曲線は P_1, P_2 および5つの特異点を内部に含む閉曲線と P_1 および P_2 を囲む小さい閉曲線から成り P_3 の運動の起る領域は左図の斜線部分となる．この時 Birkhoff はいわゆる Poincaré の最後の定理を用いて次の定理を証明した．



定理　十分小なる μ に対し、P_1 の十分近くで、十分何回か P_1 のまわりをまわった後初めて閉ぢる周期解が存在する．

（斎藤．解析力学入門　P184－213）

§8．Moser の周期解．

十分小なる $\mu \neq 0$ に対し $\omega_0^{-1} \neq 0, -\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ならば周期 $2\pi/\omega_0$ の第1種周期解が存在する．Moser は Birkhoff の不動点定理を用い十分小なる μ に

対し上記の才1種周期解の近傍でそれの周りを十分何回もまわった後閉じる周期解が存在することを示した.

Moser, J. Periodische Lösungen des restringenten Dreikörperproblems, die sich erst vielen Umläufen schließen. Math. Ann. 126 (1953) 325–335.

証明の方針は後でのべる.

§9. Arenstorf の周期解 A (Arenstorf (i)) $\mu=0$ のとき e を $(0, 1)$ の任意の値とし、初期条件、

$x(0)=a(1+e)$, $x'(0)=i(c-x(0)^2)/x(0)$, $c^2=a(1-e^2)$

で定まる (1) の解を $x^*(t)$ とかく. 静止座標系では初期条件 (4) で定まる楕円軌道を表わす. ここで適合条件 $a=(m/k)^{2/3}$ をみたすものとする.

定理 任意の $a=(m/k)^{2/3}$ を固定し e は $(0\ 1)$ の高々有限個の値をのぞき任意の数とする. このとき正数 μ^* が存在し $0 \leqq \mu < \mu^* < 1$ なる全ての μ に対し e に解析的に depend する周期解の族をもち、これらの解は μ に関しても正則で $\mu=0$ のとき $x^*(t)$ となる.

§10. Arenstorf の周期解 B (Arenstorf (ii)) μ を小にとり P_2 の質量は P_1 の質量より小とする. P_2 と P_3 で定まる2体問題の解を $x^*(t)$ とかく.

定理 $x^*(t)$ は静止座標系で P_2 を焦点とする十分小なる長径

および任意の離心率 e $(0<e<1)$ をもつ楕円軌道に対応する周期解とする．このとき任意の μ $(0<\mu\leqq 1)$ に対し $x^{*}(t)$ の近傍に(1)の周期解の 1-parameter family が存在する．

この定理により例えば P_1 を地球，P_2 を月とすると，月のまわりをまわる人工衛星の運動を定める．

§11. 今までのべた定理は必ずしも方程式(1)又は(3)を直接、取扱わず例えば正準変換等により問題に適した形に変換してから証明されてきた．ここでそれらをまとめておく．

(斎藤，解析力学入門 P197–202. Moser, Arenstorf (ii))

(i) $(x_1\ x_2\ y_1\ y_2)$ $\qquad y_1 = x_1' - x_2 \quad y_2 = x_2' + x_1$ $\quad$ (§5)

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + (y_1 x_2 - y_2 x_1) + U(x_1, x_2)$$

(ii) 極座標に直す $(\rho.\ \varphi,\ p_\rho,\ p_\varphi)$

$$x_1 = \rho\cos\varphi \qquad x_2 = \rho\sin\varphi$$

$$p_\rho = y_1\cos\varphi + y_2\sin\varphi \qquad p_\varphi = -y_1\rho\sin\varphi + y_2\rho\cos\varphi$$

$$H = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_\varphi^2/\rho^2) - p_\varphi + U(\rho, \varphi).$$

(iii) Delaunay variable $\quad$ (§7 §9)

$$L = \frac{1}{-p_\rho^2 - p_\varphi^2/\rho^2 + 2/\rho}, \qquad G = p_\varphi$$

$$l = \sin^{-1}\left\{\frac{-p_\rho^2\cdot\rho^2 + \rho - p_\varphi^2}{\sqrt{(1 + p_\rho^2 p_\varphi^2)\rho^2 - 2p_\varphi^2\rho + p_\varphi^4}}\right\} - p_\rho\sqrt{-p_\rho^2\rho^2 + 2\rho - p_\varphi^2}$$

$$g = \tilde{\omega} - t = \varphi + \sin^{-1}\left\{\frac{p_\varphi^2 - \rho}{\sqrt{(1 + p_\rho^2 p_\varphi^2)\rho^2 - 2p_\varphi^2\rho + p_\varphi^4}}\right\} - t$$

$$R(L,G,l,g)=\frac{1}{2L^2}+G+\mu R^*(L,G,l,g)$$

微分方程式は

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial R}{\partial l} \quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial R}{\partial g} \quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial L} \quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial G}$$

$\mu=0$ の場合には $L=\sqrt{a}$, $G=\sqrt{a(1-e^2)}$ となる.

(iv) Poincaré variable (§6. §8, §9)

$$\Lambda=L \quad \lambda=l+g, \quad \xi=\sqrt{2(L-G)}\cos g, \ \eta=-\sqrt{2(L-G)}\sin g$$

$$\Omega=\frac{1}{2\Lambda^2}+\Lambda-\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)+\mu\Omega^*(\Lambda,\lambda,\xi,\eta) \qquad R^*=\Omega^*.$$

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} \quad \frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda} \quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \quad \frac{d\eta}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}$$

(v) Moser 及 Arenstorf が用いた変数 (§8, §9)

$$F=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}, \quad H=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)-c-r^{-1}$$

$$U=\frac{x_1}{r}-cy_2 \quad V=\frac{x_2}{r}+cy_1 \qquad r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$$

$$c=x_1y_2-x_2y_1$$

このとき関数行列式 $D=-(2H+3C)\cdot C^2/r^2$. $\mu=0$ のとき

C は面積定数, H+C はエネルギーの積分定数である.

微分方程式は $\mu=0$ のとき

$$(5) \quad \frac{dF}{dt}=C^{-3}(1-U\cos F-V\sin F)^2, \quad \frac{dH}{dt}=0, \ \frac{dU}{dt}=V, \ \frac{dV}{dt}=-U$$

一般に $\mu\neq0$ のときは方程式(1)は

$$\frac{dF'}{dt}=g_1,\quad \frac{dH}{dt}=g_2,\quad \frac{dU}{dt}=g_3,\quad \frac{dV}{dt}=g_4,\quad g_i=g_i(F,H,U,V,\mu)$$

とかけ(5)の解の近傍で正則となり $\mu=0$ のとき(5)と一致する.

§12. Moser の周期解の存在の証明は Poincaré variable を用いると証明が簡単になる. 次の方法は Barrar による.

Barrar, R. B. A new proof of a theorem of J. Moser concerning the restricted problem of three bodies.

Math. Ann. 160 (1965) 363−369.

§11.(iV) において $\mu=0$ とすると

$$\frac{d\Lambda}{dt}=0\qquad \frac{d\lambda}{dt}=\Lambda^{-3}-1\qquad \frac{d\xi}{dt}=-\eta\qquad \frac{d\eta}{dt}=\xi$$

$\mu=0$ のときの円軌道に対応する解は

$$\Lambda=\Lambda_0\ (\text{const.})\qquad \lambda=(\Lambda_0^{-3}-1)t,\quad \xi=\eta=0$$

$\Lambda_0^{-3}-1=\omega_0$ とおくと周期解の周期は $2\pi/\omega_0$ となる. §6 から十分小なる $\mu\neq 0$ に対し $\omega_0\neq 1/M$, $M=0,-\frac{1}{2},\pm1,\pm2,\cdots$ のとき周期 $2\pi/\omega_0$ の周期解が存在する. μ を十分小にとり固定する. 初期条件

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\xi=\xi(\mu)+\xi_1\qquad \lambda=0\\ &\eta=\eta(\mu)+\eta_1\qquad \Omega=\Omega(\mu)\end{aligned}$$

(ξ_1,η_1) は十分小なる parameter をみたす(iV)の解を考える. $(\xi_1\ \eta_1)=0$ ならば $t=2\pi/\omega_0$ で $\lambda=2\pi$ 平面を切る周期解が存在する. $(\xi_1\ \eta_1)$ が十分小なら初期条件(6)をみたす解は時間 $T\doteqdot 2\pi/\omega_0$ の後に平面 $\lambda=2\pi$ を実

$$\xi = \xi(\mu) + \xi_2 \qquad \lambda = 2\pi$$
$$\eta = \eta(\mu) + \eta_2 \qquad \Omega = \Omega(\mu)$$

で横切り

$$A\ ;\ \begin{aligned} \xi_2 &= f(\xi_1\ \eta_1\ \mu) = a_{11}\xi_1 + a_{12}\eta_1 + \sum C_{ij}\xi_1^i\eta_1^j \\ \eta_2 &= g(\xi_1\ \eta_1\ \mu) = a_{21}\xi_1 + a_{22}\eta_1 + \sum E_{ij}\xi_1^i\eta_1^j \end{aligned}$$

とかける。写像AをP回くりかえしたものをA^Pとかく。A^Pの不動点に対し(iv)の周期解が対応する。Aの線形部分の固有値εが± 1でないとき *area preserving map* T

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= f(r_1\ s_1) \\ \eta_1 &= g(r_1\ s_1) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \xi_2 &= f(r_2\ s_2) \\ \eta_2 &= g(r_2\ s_2) \end{aligned}\right. \qquad \begin{array}{ccc} (\xi_1\ \eta_1) & \xrightarrow{A} & (\xi_2\ \eta_2) \\ {\scriptstyle T^{-1}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ (r_1\ s_1) & \xrightarrow[B]{} & (r_2\ s_2) \end{array}$$

が存在し$T^{-1}AT = B$は

$$(7) \qquad \begin{aligned} r_2 &= r_1\cos\chi - s_1\sin\chi \\ s_2 &= r_1\sin\chi + s_1\cos\chi \end{aligned}, \qquad \chi = \sum_0^{\infty}\gamma_i(r_1^2+s_1^2)^i \qquad \varepsilon = e^{i\gamma_0}$$

とかけ、γ_iはAの *invarients* となる。

Birkhoffの不動点定理. (7)において$\gamma_1 \neq 0$, $\varepsilon^3 \neq 1$, $\varepsilon^4 \neq 1$をみたす *area-preserving map* Aは原点の各近傍の中に十分大なるpに対しA^Pの不動点を有す。

Siegel, C.L. Vorlesungen über Himmelsmechanik (1956)

この定理を適用するときμに関する解析性から$\mu=0$の場合のχの値をしらべれば十分である。簡単な計算により次のことが示される；

$$\xi_2 = \xi_1 \cos(2\pi/\omega_1) - \eta_1 \sin(2\pi/\omega_1)$$
$$\eta_2 = \xi_1 \sin(2\pi/\omega_1) + \eta_1 \cos(2\pi/\omega_1)$$
$$\omega_1 = n_1 - 1 = \Lambda_1^{-3} - 1, \qquad \frac{1}{2\Lambda_1^3} + \Lambda_1 - \frac{1}{2}(\xi_1^2+\eta_1^2) = \Omega(0)$$

$$\chi = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{3\pi(\omega_0+1)}{\omega_0^3\Lambda_0}(\xi_1^2+\eta_1^2)+\cdots \quad , \varepsilon = e^{2\pi i/\omega_0}$$

ゆえに　$\omega_0 \neq 0,\ 3/n,\ 4/n$　$(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$　ならば十分小なる μ と十分大なる素数 p に対し才1種周期解の近傍に入り p 回それのまわりをまわって初めて閉ぢる周期解が存在する。

§13　Arenstorf の周期解の存在の証明は Poincare variable を用いて行う。$\mu \neq 0$ に対し初期条件 $(0, 0, \xi_0, \Lambda_0)$ により定まる(iV)の解を

(8)　$F^\mu(0\ 0\ \xi_0, \Lambda_0; t) = [\eta^\mu(0\ 0\ \xi_0\ \Lambda_0 t),\ \lambda^\mu(0\ 0\ \xi_0\ \Lambda_0 t),$

$\xi^\mu(0\ 0\ \xi_0\ \Lambda_0\ t),\ \Lambda^\mu(0, 0, \xi_0, \Lambda_0, t)]$

とかく（但し $\xi_0 \neq 0,\ \Lambda_0^3 = m/k$ ）.

$\mu = 0$ のとき微分方程式は

$$\frac{d\eta}{dt} = -\xi, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \Lambda^{-3}+1, \quad \frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\Lambda}{dt} = 0,$$

初期条件 $(0, 0, \xi_0, \Lambda_0)$ で定まる解は

$$F^0(0, 0, \xi_0, \Lambda_0, t) = [-\xi_0 \sin t,\ (\Lambda_0^{-3}+1)t,\ \xi_0 \cos t,\ \Lambda_0],$$

$\Lambda_0^3 = m/k$, $t = m\pi$ とすると

$$F^0(0, \xi_0, \Lambda_0, m\pi) = (0, (k+m)\pi, \xi_0, \Lambda_0)$$

となり周期解を表わしている。(8)が周期解を表わすためには

$$(9) \quad \begin{cases} \eta^\mu(0, 0, \xi_0, \Lambda, t) = 0 \\ \lambda^\mu(0, 0, \xi_0, \Lambda, t) = n\pi \quad (n, \text{integer}) \end{cases}$$

がみたされればよい。$t \fallingdotseq m\pi$, $\Lambda^3 \fallingdotseq m/k$ のとき(9)がとけることをいえばよいがそのためには陰関数の定理から

$$\Delta^\mu \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \eta^\mu}{\partial \Lambda} & \dfrac{\partial \eta^\mu}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \lambda^\mu}{\partial \Lambda} & \dfrac{\partial \lambda^\mu}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$$

ならばよい。μに関して analytic だから $\mu = 0$ のとき成り立てば十分小なる $\mu \neq 0$ についても成り立つ。ところが

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} 0, & -\xi_0 \cos t \\ -\dfrac{3t}{\Lambda^4}, & \dfrac{1}{\Lambda^3} + 1 \end{vmatrix}_{\substack{\Lambda = \Lambda_0 \\ t = m\pi}} = \pm \frac{3\xi_0 m\pi}{\Lambda_0^4} \neq 0.$$

§14　Poincaréの第1種周期解に対してMoserはその周期解の近傍を十分何回かまわって初めて閉じる周期解の存在を示したが、これに対しArenstorfの第2種周期解についてもこの周期解の近傍をまわる周期解の存在が考えられるが、実際に次のことが成立することは§12と全く同様にして容易に分る。

"十分小なるεに対し十分小なるμのときArenstorfの第2種周期解をとる。このときこの周期解の近傍を十分何回もまわった後閉じる周期解が無数に存在する"。

§15　制限3体問題の周期解に関して今までのべた他には次の論文がある：

1. B. O. Koopman：On the rejection to infinity and exterior motion in the restricted problems of three bodies.
Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927) 287–331
2. C. Conley：On some new long periodic solutions of the plane restricted three body problem
Commu. on Pure and Appl. Math. 16 (1963) 449–467

以上で現在しられている制限3体問題の周期解の存在についてのべたがこれらの間の相互関係，例えば Birkhoff の周期解(§7)，Moser の周期解(§8)，および Arenstorf の周期解(§9, §10, §14)が同じものか或いは異っているか，包含関係があるかどうかというようなことは分っていないように思われる．

以上．