数理解析研究所講究録
第63巻 1969年 69-83

ある種の非線型振動方程式について

埼大 理工　佐藤 祐吉

§1 序

ある種の電気回路（例ば図1のような江崎Diode (ED) を含む）から導かれる2階非線型方程式の周期解について考える。

最初の解析的研究は古屋先生[1]によつて行なわれた。

この回路の方程式は

$$(1)\qquad L\frac{di}{dt}=E-Ri-v$$

$$C\frac{dv}{dt}=i-\varphi(v)$$

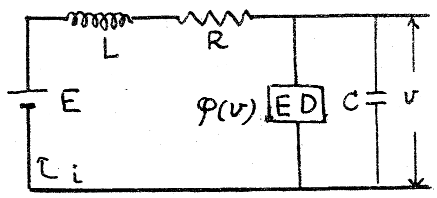

図 1

となる。図1においてEDの電圧一電流特性は図2のような形をしているものとする。ここでは次の条件を満足するものとする。

$v\varphi(v)>0\quad v\neq 0\ ;\ \varphi(0)=0.$

$\varphi'(v)>0,\ v<m$ 又は $v>n.$

$\varphi'(v)<0,\ m<v<n.$

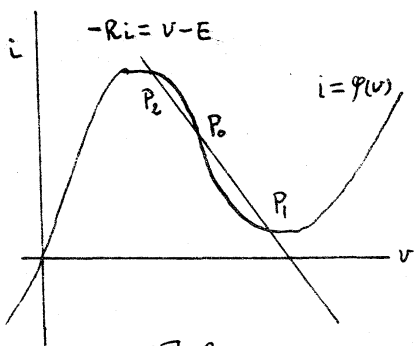

図 2

$\varphi''(v)<0,\ v<m_0\ ;\ \varphi''(v)>0,\ v>m_0\ \ (m<m_0<n)$。

曲線 $i=\varphi(v)$ と $-Ri=v-E$ の交点Pが(1)の危点である。Pにおいて $\varphi'/C+R/L>0$ 又は <0 によって、その危点はとうげ点を除いて安定又は不安定となる。

$-\varphi'(v)<1/R$ の場合は交点が1つで一般化した Liénard の方程式となり直接には Flatto [3] の研究がある。したがって、ここでは、ある区間で $-\varphi'(v)>1/R$ となる場合を考える。

凡ての v に対して $\varphi'/C+R/L>0$ であると、危点はとうげ点を除いて安定となり、この場合には(1)の閉軌道は存在しないことは容易に示される。

故に　$\varphi'/C+R/L<0 \qquad m_1<v<n_1$

　　　$\varphi'/C+R/L>0 \qquad m_1>v$ 又は $n_1<v$.

の場合を考える。

図2で示したように、特異点を $P_k=(i_k,v_k)\quad k=0,1,2$ で表わす。(但し、$P_l=P_k\ (l\neq k)$ の場合も含む)。

今 $i=i_0+y,\ v=v_0+x$ とおき、(1)に代入して、y を消去すると

$$\ddot{x}+\left(\frac{R}{L}+\frac{\psi'}{C}\right)\dot{x}+\frac{1}{LC}(x+R\psi)=0$$

$$\cdot=\frac{d}{dt},\quad \psi(x)=\varphi(v_0+x)-\varphi(v_0)$$

又は

(2) $\ddot{x}+\rho(\varepsilon+f'(x))\dot{x}+\delta(x+f(x))=0$

但し $1/CR=\rho$, $1/LC=\delta$; $CR^2/L=\varepsilon$, $R\psi(x)=f(x)$.

$\alpha_i=v_i-v_0 \quad i=0,1,2,\quad \beta_1=n_1-v_0,\quad \beta_2=m_2-v_0$

とおくと

$x(x+f(x))>0 \qquad x<\alpha_2$ 又は $x>\alpha_1$

$x(x+f(x))<0 \qquad \alpha_2<x<0$ 又は $0<x_1<\alpha_1$

$\varepsilon+f'(x)>0 \qquad x<\beta_2$ 又は $x>\beta_1$

$\varepsilon+f'(x)<0 \qquad \beta_2<x<\beta_1$

である。

ここでは次の三つの場合を考える。

Case 1. $\beta_2<\alpha_2<0<\alpha_1<\beta_1$

Case 2. $\alpha_2<\beta_2<0<\beta_1<\alpha_1$

Case 3. $\alpha_1=0$ 又は $\alpha_2=0$

§2 Case 1 での周期解の存在

最初に佐藤[4]で得られた定理を方程式(2)に適用すると次の定理が得られる。

定理A 「$\int_0^{\beta_i} x+f(x)\,dx \geq 0 \quad i=1,2$」又は

「$\int_0^{x_1} x+f(x)\,dx=\int_0^{x_2} x+f(x)\,dx \quad 0<x_1<\beta_1<x_2$ (又は $x_2<\beta_2<$

$x_1 < 0$) のとき

(3) $$\left|\frac{x_1+f(x_1)}{\varepsilon+f'(x_1)}\right| < \left|\frac{x_2+f(x_2)}{\varepsilon+f'(x_2)}\right|$$ となる。」

そのとき，(2) は少なくとも一つの定数でない周期解を持つ。

定理Aと類似な方法で次の定理が得られる。

定理1 $\int_0^{x_1} x+f(x)\,dx = \int_0^{x_2} x+f(x)\,dx$ ， $0<x_1<\alpha_1<x_2$

(又は $x_2<\alpha_2<x_1<0$)

のとき

(4) $\varepsilon x_2 + f(x_2) < \varepsilon x_1 + f(x_1)$, $x_1, x_2 > 0$,

(又は、 $\varepsilon x_2 + f(x_2) > \varepsilon x_1 + f(x_1)$, $x_1, x_2 < 0$)

ならば (2) は少なくとも一つの定数でない周期解を持つ。

証明．(2) と同値な次の方程式を考える。

(5)
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \rho(\varepsilon x + f(x))\\ \dot{y} &= -\delta(x+f(x))\end{aligned}$$

この方程式の危点は $(0,0)$, (α_1,γ_1), (α_2,γ_2) の3つである。

但し，$\gamma_i = \rho(\varepsilon\alpha_i + f(\alpha_i))$ $i=1,2$

任意の x_0 ($0 \leqq x_0 \leqq \alpha_1$) に対して，点 $A = (x_0, \rho(\varepsilon-1)x_0)$ を通る (5) の軌道を Γ とする。

注意： $\alpha_1 < \beta_1$ より $0<\varepsilon<1$ である。

図3に示すように，軌道 Γ が半直線 $\{x=\alpha_1,\ y \geqq \gamma_1\}$,

$\{ y = \gamma_1 ,\ x \geqq \alpha_1 \}$,

$\{ x = \alpha_1 ,\ y \leqq \gamma_1 \}$,

$\{ y = \gamma_1 \quad x \geqq \alpha_1 \}$

と交る点をそれぞれ B, C, D, E とする。

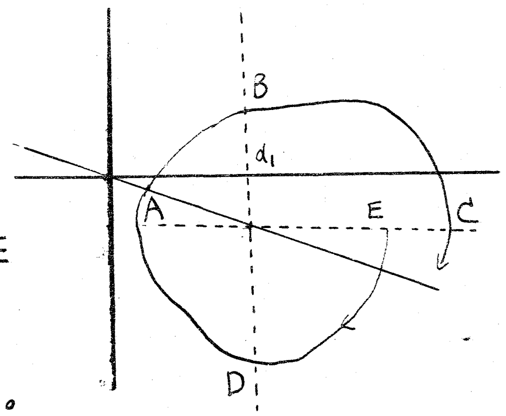

図 3

補題1　点Eは C の左側にある。

Γ 上で

$$(6) \qquad \lambda(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x)$$

を考える。但し $G(x) = \int_0^x x + f(x)\, dx$。

補題1を証明するためには、$x \geqq \alpha_1$ に対して $G(x)$ は単調増加であるので、次の不等式を示せば十分である。

$$\lambda(E) < \lambda(C)$$

曲線 $\widehat{ED}$, $\widehat{DB}$, $\widehat{BC}$ に対応する λy-平面上の曲線を $y_{III}(\lambda)$, $y_{I}(\lambda)$, $y_{II}(\lambda)$ で表わす。

(5) と (6) より $\dfrac{d\lambda}{dt} = -\rho\delta(\varepsilon x + f(x))(x + f(x))$ であるから

$$(7) \qquad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{\rho(\varepsilon x + f(x))}$$

を得る。したがって、$\lambda(> b \equiv \lambda(B))$ が b の十分近くでは $dy_{I}/d\lambda < dy_{II}^{+}/d\lambda < 0$ であるから

$$y_{I}(\lambda) < y_{II}^{+}(\lambda)$$

曲線 y_{I} と y_{II}^{+} が $\lambda = b$ 以外で再び交わると仮定し，

$$\lambda_1 = \min\{\lambda \mid y_{\mathrm{I}}(\lambda) = y_{\mathrm{II}}^{+}(\lambda),\ \lambda > b\}$$

とおくと

$$(8)\qquad \left[\frac{dy_{\mathrm{I}}}{d\lambda} \geqq \frac{dy_{\mathrm{II}}^{+}}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1} \quad \text{又は} \quad \left[\frac{dy_{\mathrm{I}}}{d\lambda} < 0 < \frac{dy_{\mathrm{II}}}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1}$$

を得る。 図4参照

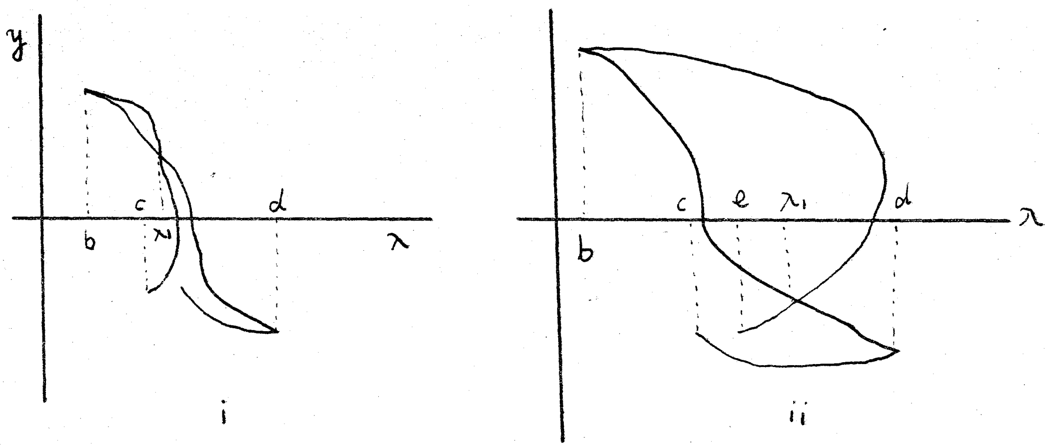

図 4

点 $(\lambda_1, y_{\mathrm{I}}(\lambda_1))$, $(\lambda_1, y_{\mathrm{II}}^{+}(\lambda_1))$ に対応する Γ 上の点を (x_1, y_1), (x_2, y_2) とすると

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}y_1^2 + G(x_1) = \frac{1}{2}y_2^2 + G(x_2)$$

であるから， $G(x_1) = G(x_2)$, $(x_1 < \alpha_1 < x_2)$ を得る。

一方 (7) と (8) より

$$\varepsilon x_1 + f(x_1) \leqq \varepsilon x_2 + f(x_2)$$

又は

$$\varepsilon x_1 + f(x_1) < 0 \leqq \varepsilon x_2 + f(x_2)$$

となる。 これは条件 (4) に反する。

故に y_{I} と y^+_{II} は $\lambda = b$ 以外では交わらぬ。

$$y_{\mathrm{I}}(\lambda) < y^+_{\mathrm{II}}(\lambda) \quad (b<\lambda\leqq c = \lambda(C)).$$

全く同様にして y_{I} と y^-_{II} が交わらぬことが示される。

$$y_{\mathrm{I}}(\lambda) > y^-_{\mathrm{II}}(\lambda) \quad (e=\lambda(E)<\lambda \leqq d)$$

$y_{\mathrm{I}}(\lambda)$ は区間 $[b, d]$ で連続で単調減少であり $y^+_{\mathrm{II}}(c) = y^-_{\mathrm{II}}(e)$ より

$$\lambda(E) < \lambda(C).$$

全く類似な性質が危点 (α_2, γ_2) に対しても成り立つので、次の補題が成り立つ。

補題2. 次の条件をみたす閉曲線R_1が存在する。

i R_1は (4) の危点を内部に凡て含む。

ii (4) の軌道でR_1と交わるものは、凡てR_1の外に出る。

一方 Levinson-Smith の定理により、次の条件をみたす原点から十分離れた曲線R_2が存在する。

「R_2の内部に含まれる点から出る軌道はR_2の外には出ない」

故に Poincaré-Bendixson の定理により、R_1とR_2で囲まれる領域に閉軌道は少なくとも一つは存在する。

§3 Case 1 で周期解の一意性

古屋先生[2]の定理を (2) に適用すると

定理B　定理Aの条件と $G(\beta_1)=G(\beta_2)$ ならば、(2) はただ一つの定数でない周期解を持つ。$G(x)\equiv\int_0^x x+f(x)\,dx$.

定理Bの条件で $G(\beta_1)=G(\beta_2)$ の条件を少しゆるめる。すなわち

定理2　定理Aの条件と更に $G(\beta_1)=G(\beta_2)\geqq 0$　又は

$G(\beta_i)\leqq 0$　$(i=1,2)$ ならば (2) の定数でない周期解はただ一つである。

証明　$G(\beta_i)\leqq 0$　の場合のみを証明する。

(2) と同値な方程式

$$(9)\qquad \begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-\rho(\varepsilon+f'(x))y-\delta(x+f(x))\end{aligned}$$

を考える。危点は $(0,0)$, $(\alpha_i,0)$ $i=1,2$ である。

(9) の閉軌道の一つを Γ とする。Γ が x 軸と交わる点を $E_i=(\eta_i,0)$　$(\eta_2<\eta_1)$　とする。

最初に $\eta_2<\beta_2$, $\beta_1<\eta_1$ となることを示す。

Γ 上で $\lambda(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)$ の変化を考える。(9) より

$$(10)\qquad \frac{d\lambda}{dt}=-\rho y^2(\varepsilon+f'(x))$$

$|\eta_i|\leqq|\beta_i|$　$i=1,2$　と仮定する。

Γ 上の点AからBまで (10) を積分する

$$\lambda(B)-\lambda(A)=-\int_{t_A}^{t_B}\rho y^2(\varepsilon+f'(x))\,dt\ >0$$

特に一周して $A=B$ となると、上式の左辺は zero となり矛盾する。

次に、例へば $\beta_2<\eta_2$, $\beta_1<\eta_1$ と仮定する。

Γ と直線 $x=\beta_1$ との交点を $A=(\beta_1, y_a)$ $(y_a>0)$, $B=(\beta_1, y_b)$ $(y_b<0)$ とする。

曲線 $\widehat{BE_2A}$ に対応する λy ー平面上の曲線を $y_I(\lambda)$ で、$\widehat{AE_1B}$ に対応する曲線を $y_{II}(\lambda)$ で表わす。

前同様 Γ 上の点 P に対して、$\lambda(P)=p$ のように表わす.

$$\lim_{\lambda\to a} y_I(\lambda) = \lim_{\lambda\to a} y_{II}(\lambda) = y_a$$

又 (9), (10) より

$$(11)\qquad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{y} + \frac{\delta(x+f(x))}{\rho(\varepsilon+f'(x))y^2}$$

となるから．$\lim_{\lambda\to a} y_I'(\lambda) = -\infty$

$$\lim_{\lambda\to a} y_{II}'(\lambda) = +\infty \quad \left({}' = \frac{d}{d\lambda}\right)$$

故に $0<a-\lambda\ll 1$ ならば $y_I(\lambda)>y_{II}(\lambda)$ (又は $y_I(\lambda)<y_{II}(\lambda)$, $\lambda>b$) である。

$y_I(\lambda)$ と $y_{II}(\lambda)$ は $[b, a]$ で連続であるから、ある点 $b<\lambda_0<a$ で交わる。$(\lambda_0, y_j(\lambda_0))$ に対応する Γ 上の点を (x_j, y_j) $j=1,2$ とする。すなわち

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}y_1^2 + G(x_1) = \frac{1}{2}y_2^2 + G(x_2), \quad \beta_2 \leqq x_1 < \beta_1 < x_2$$

となるから $G(x_1) = G(x_2) > G(\beta_1)$。

一方 $\alpha_1 \leqq x_1 < \beta_1$ ならば $G(x) < G(\beta_1)$ より $\beta_2 \leqq x_1 < \alpha_1$.

$0 \leqq x_1 < \alpha_1$, $y_1 \neq 0$ の場合

$$\lambda_0 = \max\{\lambda ; y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda), \lambda < a\}$$

とする。

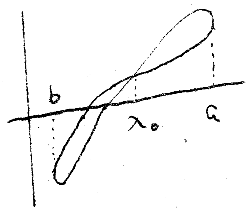

図 5

(11) と $y_1 = y_2$, $y_I'(\lambda_0) \geqq y_{II}'(\lambda_0)$ より

$$\frac{x_1 + f(x_1)}{\varepsilon + f'(x_1)} \geqq \frac{x_2 + f(x_2)}{\varepsilon + f'(x_2)} > 0$$

これは条件 (3) に反する。

$0 \leqq x_1 < \alpha_1$, $y_1 = 0$ とする。$y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda)$, $\lambda_0 < \lambda < a$, したがって、λ_0の十分近くでは、$y_{II}'(\lambda) > y_I'(\lambda)$ 。故に $\lambda_0 < \lambda < a$ で $y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda)$ となるλが存在する。これはλ_0の定義に反する。故に $\beta_2 \leqq x_1 < 0$ となる。

$\lambda(E_1) \leqq \lambda(E_2)$ と仮定する。

Γ と y 軸との交点を C, D とする。但し、$y_I(C) > 0 > y_I(D)$

$$\lambda(C) > \lambda_0 = \max\{\lambda ; y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda), \lambda < a\} \geqq \lambda(E_2)$$

より、$y_I(C) > y_{II}(C) > 0$ 。一方

$$\lambda(C) = \frac{1}{2}\{y_I(C)\}^2 = \frac{1}{2}\{y_{II}(C)\}^2 + G(x_0)$$

$$\therefore \quad G(x_0) > 0$$

又 $\lambda_0 < \lambda(C)$ より $x_2 > x_0\ (> \beta_1)$ であるから $0 < G(x_2) = G(x_1)$ 。ところで、$\beta_2 \leqq x \leqq \beta_1$ ならば $G(x) \leqq 0$ であるから、これは矛盾である。

$\lambda(E_2) < \lambda(E_1)$ の場合も同様にして矛盾が導かれる。

$$\therefore\quad \eta_2 < \beta_2 ,\quad \beta_1 < \eta_1 .$$

図6に示すように Γ 上の点を $A, B, C, D, E_1, E_2, F_1, F_2$ とする。

(11) より明らかに、

$$\lambda(A) > \lambda(E_1) > \lambda(B)$$

$$\lambda(C) > \lambda(E_2) > \lambda(D)$$

である。

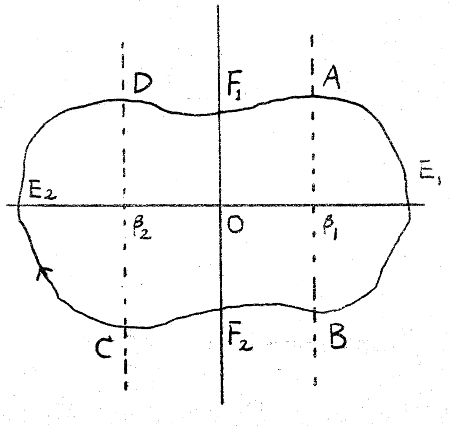

図 6

曲線 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ に対応する λy−平面上の曲線を $y_{II}^+(\lambda)$, $y_I^-(\lambda)$, $y_{II}^-(\lambda)$, $y_I^+(\lambda)$ とする。

$y_{II}^+(\lambda)$ は $[b, a]$ で、$y_{II}^-(\lambda)$ は $[d, c]$ でそれぞれ連続であり、$a > d$、$c > b$ であるから、y_{II}^+ と y_{II}^- とは、ある点 $\lambda = \lambda_0$ で交わる。前と同様な論法で、y_{II} と y_I は、a, b, c, d, を除いて交わらない。

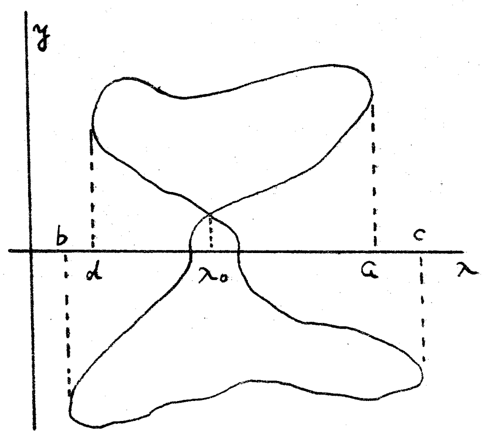

図 7

若し、$\lambda(E_1) = \lambda(E_2) = \lambda_0$ ならば

$$(12)\quad \begin{cases} |y_{II}^+(\lambda)| \leqq y_I^+(\lambda) & \lambda_0 \leqq \lambda \leqq a \\[2em] |y_{II}^-(\lambda)| \leqq y_I^+(\lambda) & d \leqq \lambda \leqq \lambda_0 \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} |y_{II}^{+}(\lambda)| \leqq |y_{I}^{-}(\lambda)| & b \leqq \lambda \leqq \lambda_0 \\ \\ |y_{II}^{-}(\lambda)| \leqq |y_{I}^{-}(\lambda)| & \lambda_0 \leqq \lambda \leqq c \end{cases}$$

を得る。

$\lambda(E_1) \neq \lambda(E_2)$ の場合にも (12), (13) の不等式が成り立つことをこれから示す。一般性を失うことなく

$$(14)\qquad \lambda(E_1) < \lambda(E_2)$$

と仮定する。したがって $y_{II}^{+}(\lambda_0) = y_{II}^{-}(\lambda_0) > 0$

故に、不等式 (12) は成り立つ。

(13) が成立しないと仮定する。

したがって

$$(15)\qquad \lambda_1 = \max\{\lambda;\ -y_{II}^{-}(\lambda) = y_{I}^{-}(\lambda)\}$$

又は

$$(15')\qquad \lambda_1 = \min\{\lambda;\ -y_{II}^{+}(\lambda) = y_{I}^{-}(\lambda)\}$$

なる λ_1 が存在する。すなわち

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(y_{I}^{-})^2 + G(x_1) = \frac{1}{2}(y_{II}^{-})^2 + G(x_2)$$

又は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(y_{I}^{-})^2 + G(x_1) = \frac{1}{2}(y_{II}^{+})^2 + G(x_2)$$

同様のことであるが

$$(16)\qquad G(x_1) = G(x_2) \leqq 0 \quad \beta_2 < x_1 < \beta_1,\ \beta_1 < x_2 \ \text{or}\ \beta_2 > x_2$$

(15) の場合を考える。

$\lambda_0 = \lambda(x_0^+, y_{\mathrm{I}}^+) = \lambda(x_0^-, y_{\mathrm{II}}^-)$，$\lambda(F_1) = \lambda(x^+, y_{\mathrm{I}}^+) = \lambda(x^-, y_{\mathrm{II}}^-)$

$F_1 = (0, y_{\mathrm{I}}^+)$とする。　すなわち、

$$\lambda(F_1) = \frac{1}{2}(y_{\mathrm{I}}^+)^2 = \frac{1}{2}(y_{\mathrm{II}}^\pm)^2 + G(x^\pm)$$

(12) より　　$G(x^\pm) > 0$

$\lambda_0 \leqq \lambda(F_1)$（又は $\lambda_0 > \lambda(F_1)$）ならば　$\beta_1 < x^+ \leqq x_0^+$（又は $x_0^- < x^- < \beta_2$）であるので　$0 < G(x^\pm) \leqq G(x_0^\pm)$.

一方　$x_2 \leqq x_0^- < \beta_2$　であるから　$0 < G(x_2)$　これは (16) に反する。

(15′)の場合も同様であるから (13) は成り立つ.

(9) の閉軌道 $(x(t), y(t))$ の周期を T とする.

$$\int_0^T \rho(\varepsilon + f'(x(t)))\,dt = \rho\left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right)\left((\varepsilon + f'(x))\frac{dt}{d\lambda}d\lambda\right)$$

$$= -\left\{\int_a^b \left(\frac{1}{y_{\mathrm{II}}^+(\lambda)}\right)^2 d\lambda + \int_b^c \left(\frac{1}{y_{\mathrm{I}}^-(\lambda)}\right)^2 d\lambda + \int_c^d \left(\frac{1}{y_{\mathrm{II}}^-(\lambda)}\right)^2 d\lambda\right.$$

$$\left. + \int_d^a \left(\frac{1}{y_{\mathrm{I}}^+(\lambda)}\right)^2 d\lambda\right\}$$

$$= \left(\int_b^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^a\right)\left(\frac{1}{y_{\mathrm{II}}^+}\right)^2 d\lambda + \left(\int_d^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^c\right)\left(\frac{1}{y_{\mathrm{II}}^-}\right)^2 d\lambda$$

$$- \left(\int_d^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^a\right)\left(\frac{1}{y_1^+}\right)^2 d\lambda - \left(\int_b^{\lambda_0} + \int_{\lambda_0}^c\right)\left(\frac{1}{y_{\mathrm{I}}^-}\right)^2 d\lambda$$

不等式 (12), (13)　より

$$\int_0^T f(\varepsilon + f'(x))\,dt > 0$$

軌道安定に対するPoincaréの定理により、(7)の凡ての閉軌道は漸近軌道安定である。又隣合う二つの閉軌道が共に漸近軌道安定となることはないので定理2の証明が完結する

§4 Case 2 の研究

佐藤[5]で得られた定理を方程式(2)に適用すると

定理C (i) $f'(x_1) + f'(x_2) \geqq f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

(ii) $G(\tilde{x}_1) = G(\tilde{x}_2)$, $0 < \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ ならば $|\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2| > |2\beta_c|$、

(i)(ii)を満足するとき(2)の周期解は存在しない。

定理3. (i) $\varepsilon < 1$

(ii) $G(x_1) = G(x_2)$, $0 \gtrless x_1 \gtrless x_2$ ならば

$$\varepsilon x_2 + f(x_2) \gtrless \varepsilon x_1 + f(x_1)$$

(iii) $G(\delta_1) = 0$ $\delta_1 \gtrless 0$ ならば $\varepsilon\delta_1 + f(\delta_1) \gtreqqless 0$.

以上の条件が成り立つとき，(2)の周期解は存在しない。

定理4 $\varepsilon = 1$ のときは周期解は存在しない。

定理3，4の証明は省略する。

§5 Case 3 の研究

ここでは次の定理のみを記しておく

定理５ (i) $\alpha_2 = 0$ (ii) $G(\beta_1) > 0$ ならば (2) の定数でない周期解は少なくとも一つ存在する 更に (iii) $G(\beta_2) = G(\beta_1)$ ならば、ただ一つの周期解をもつ。

定理６ (i) $\alpha_2 = 0$ (ii) $G(x_1) = G(x_2)$, $0 < x_1 < \beta_1 < x_2$ ならば

$$\frac{x_1 + f(x_1)}{\varepsilon + f'(x_1)} \leqq \frac{x_1 + f(x_2)}{\varepsilon + f'(x_2)}$$

このとき (2) は少なくとも一つ周期解を持つ。

References

<1> Furuya, S.: On a nonlinear differential equation. Comment. math. univ.st.paul. 9 (1961).

<2> " : Proceeding united states-Japan seminar on differential and Functional equations. W.A. Benjamin.inc. New york. 1967.

<3> Flatto,L.: Limit cycle studies for circuits containing one Esaki Diode. J. math. anal. & appl. 9 (1964).

<4> Sato,Y.: Periodic solutions of $\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$. Comment. math. univ. st.paul. 14 (1966).

<5> " : On a nonlinear differential equation $\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$. Scince rep. Saitama univ. Series A. 5 No.3 (1967).