数理解析研究所講究録
第68巻 1969年 10-11

前の講演 "On the solutions of Analytic Equations" への補足

名大 理　　松村英之

Artinの定理から, 永田の有名な定理

"収束巾級数環 $k\{x_1, \dots, x_n\} = k\{x\}$ の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ は, $k[[x]]$ へ上げても素イデアルである ($\mathfrak{p}k[[x]]$ が素)"

(cf. M. NAGATA, LOCAL RINGS, (45.1) and (45.6)).

が, (少くとも k が標数 0 ならば) 直ちに出ることを注意したい. 実際 $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_m)$ とおき, 仮に $\mathfrak{p}k[[x]]$ が素でないとしよう. すると $\exists\, \varphi(x), \psi(x) \in k[[x]]$, $\gamma_i(x) \in k[[x]]$ $(1 \le i \le m)$, $\varphi \cdot \psi = \sum f_i \gamma_i$, $\varphi \notin \mathfrak{p}k[[x]]$, $\psi \notin \mathfrak{p}k[[x]]$ を得る. $k[[x]]$ の極大 ideal を $\mathfrak{m}$ とすれば, $k[[x]]$ は noetherian local ring であるからすべての ideal は $\mathfrak{m}$ 進位相で閉集合, 従って $(\varphi + \mathfrak{m}^c) \cap \mathfrak{p}k[[x]] = \phi$, $(\psi + \mathfrak{m}^c) \cap \mathfrak{p}k[[x]] = \phi$ なる $c > 0$ が存在する. Artin の定理から $\varphi \equiv f\ (\mathfrak{m}^c)$, $\psi \equiv g\ (\mathfrak{m}^c)$, $\gamma_i \equiv a_i\ (\mathfrak{m}^c)$ なる $f, g, a_1, \dots, a_m \in k\{x\}$ で $fg = \sum f_i a_i$ を満足するものがある. (方程式 $WZ = \sum f_i Y_i$ を考えるわけで,

これは W, Z, Y_i について多項式だから初期条件は考慮しなくてもよい。未知数について原点をずらせばよいからである。) $f \notin \mathfrak{p}$, $g \notin \mathfrak{p}$, $fg \in \mathfrak{p}$ となり矛盾。　証了。

永田の定理は1953年に得られた。代数的に、より精密な結果が得られているのであるが、証明はかなりむづかしいので、これがArtinの定理の系として導けることは興味があると思われる。Artinの定理そのものは、決してやさしくはないが、道具としては陰函数の定理と、Weierstraßのpreparation th. と、解析空間の局所理論の基礎的部分とを使うだけで、その意味では割に初等的である。