数理解析研究所講究録
第 74 巻 1969 年 83-88

(Free talking)

不連続なマルチンゲールについて

東工大 理　土谷 正明

§1. 序

これは，フリートーキングで，話したことに，少々付け加えたものである。

2乗可積分，不連続なマルチンゲールの作る空間 $\mathfrak{M}$ に留意して，その不連続な部分空間 $\mathfrak{M}_d$ の構造が，S. Watanabe [4] (additive functional の場合)；H. Kunita & S. Watanabe [1] (Hunt process の上の $\mathfrak{M}_d$ の場合) において，明らかにされ，種々の応用が，そこでなされている。

最近，P. A. Meyer が [2] において，マルチンゲールの確率積分の拡張をしている。

それが，どの位の拡張になっているかということが，$\mathfrak{M}_d$ の表現と関連して与えることが出来る。(Theorem 1)

これは最初，本尾氏が予想されたことである。

これを additive functional の場合にみてみると，もう少し，具体的な形で与えられる (Theorem 3)。

そこで、渡辺信三氏の結果[4]の $\mathfrak{M}_d(A)$ の表現に類似の表現が得られる。その間の関係もある程度分る。

しかし、Theorem 3 の表現を得るとき、[4]の結果を使用しないと、今のところ証明出来ない。

§2. マルチンゲールの場合

notation, definition については詳しくは、P.A. Meyer [2] を参照のこと。

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$; complete separable probability space.

$(\mathfrak{F}_t)$; increasing family of sub σ-fields of $\mathfrak{F}$.

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+} \equiv \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$$

$\mathfrak{F}_0$ は $\mathfrak{F}$ の null set をすべて含む。

更に、$(\mathfrak{F}_t)$ は不連続時間をもたないことを仮定する。

i.e. $\forall T_n \uparrow T$ (stopping time の列), $\mathfrak{F}_T = \bigvee_n \mathfrak{F}_{T_n}$

考える process は、すべて $(\mathfrak{F}_t)$-well adapted として、マルチンゲール等はすべて、$(\mathfrak{F}_t)$ に関して考える。

◦ process $\{X_t\}$ が very well measurable (well measurable)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(t,\omega) \rightsquigarrow X_t(\omega)$ は、左連続（右連続），右極限（左極限）をもつ process を可測にする $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上の最小の σ-field に関して、可測となる。

$\mathfrak{M} \equiv \{$2乗可積分、右連続なマルチンゲール$\}$

$\mathcal{A}^+ \equiv \{$右連続 increasing process (A_t) ; $A_0 = 0$, $E(A_t) < +\infty$ $\forall t \geq 0\}$

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+ \equiv \{A = A^1 - A^2$; $A^i \in \mathcal{A}^+$ $i = 1, 2,\}$

$\mathcal{M}_c \equiv \{\mathcal{M}$の元で連続なもの$\}$

$\mathcal{A}^+_c$, $\mathcal{A}_c$ も同様に定義する.

知られていることを以下にあげる. $\mathcal{M} \ni X$. $X_0 = 0$ としておく.

◎ $\forall X, Y \in \mathcal{M}$ に対し, $\exists_1 \langle X, Y \rangle \in \mathcal{A}_c$;

$$X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t = \text{martingale}.$$

$\langle X, Y \rangle = 0$ のとき, X と Y は直交するという.

$\mathcal{M}_d \equiv \{X \in \mathcal{M}$; $\forall Y \in \mathcal{M}_c$, $\langle X, Y \rangle = 0\}$

◎ $X^n, X \in \mathcal{M}$.

$$X^n \longrightarrow X \quad (\text{in } \mathcal{M}) \quad \text{as } n \to \infty$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad E\{(X^n_t - X_t)^2\} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \qquad \forall t \geq 0.$$

$\mathcal{M}_c$, $\mathcal{M}_d$, $\mathcal{M}$ は上の limit の意味で閉じている.

◎ $X \in \mathcal{M}$ は, $X = X^c + X^d$ $\quad X^c \in \mathcal{M}_c$, $X^d \in \mathcal{M}_d$

と一意に分解出来る.

$X, Y \in \mathcal{M}$ に対し,

$$[X, Y]_t \equiv \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s \in \mathcal{A}$$

$[X, X]_t \equiv [X]_t$ 但し. $\Delta X_s \equiv X_s - X_{s-}$.

とおく.

$X \in \mathcal{M}$ に対し

$$L^2(X) \equiv \left\{ H = H_s(\omega) \text{ ; } H \text{ は well measurable, } E\left[\int_0^t H_s^2 \, d[X]_s\right] < +\infty \ \forall t \geq 0 \right\}$$

Theorem 0 (P. A. Meyer [2])

$\forall X \in \mathcal{M}$, $\forall H \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists_1 Y \in \mathcal{M}$, $[Y, M]_t = \int_0^t H_s \, d[X, M]_s$ for $\forall M \in \mathcal{M}$

上の Y を $\int H_s dX_s$ とかき、拡張された確率積分という。

とくに、$X \in \mathcal{M}_d \Rightarrow \int H_s dX_s \in \mathcal{M}_d$.

Theorem 1

$\exists M \in \mathcal{M}_d$; $\mathcal{M}_d = S[M] \equiv \left\{ \int H_s dM_s \ ; H \in L^2(M) \right\}$

(証略)

Remark 1

上のMは一意でない

- T ; accessible $\Longleftrightarrow P(M_T = M_{T-} \ ; T<\infty) = P(T<\infty)$
- T ; totally inaccessible $\Longleftrightarrow P(M_T \neq M_{T-} \ ; T<\infty) = P(T<\infty)$

Remark 2

$A \in \mathcal{A}^+$, quasi-left continuous & purely discontinuous

$A \prec [M]$

$\Rightarrow \tilde{A} \prec \langle M \rangle$ ($\tilde{A} \in \mathcal{A}_c^+$, $A - \tilde{A}$ = martingale)

§3 Additive functional の場合.

notation, definition については [1], [4] 参照.

- $(X_t, \mathcal{F}_t, \zeta, P_x, x\in E)$; Hunt process

Meyer の (L) を仮定する.

$\mathcal{M}(A) \equiv \{$ 平均 0, 2 乗可積分. additive functional $\}$

$\mathcal{M}_c(A) \equiv \{ \mathcal{M}(A)$ の元で continuous なもの $\}$

$\mathcal{M}_d(A) \equiv \{ \mathcal{M}(A)$ の元で $\mathcal{M}_c(A)$ と直交するもの $\}$

$X \in \mathcal{M}(A)$

$$L^2(X) \equiv \left\{ f = f(x,y)\ ;\ \begin{array}{l} f \text{ は } \mathbb{B}(E\times E)\text{-可測} \\ E_x\left[\int_0^t f^2(X_{s-}, X_s)\, d[X]_s\right] < +\infty \quad \forall t\geq 0,\ \forall x \end{array} \right\}$$

$\mathbb{B}(E\times E)$; $E\times E$ 上の有界な Borel function 全体.

Theorem 2

$X \in \mathcal{M}(A)$, $f \in L^2(X)$

$\Rightarrow \exists_1\, Y \in \mathcal{M}(A)$,

$$[Y, M]_t = \int_0^t f(X_{s-}, X_s)\, d[X, M]_s \quad \text{for } \forall M \in \mathcal{M}(A)$$

$Y = \int f(X_{s-}, X_s)\, dX_s$ (確率積分) とかく.

$X \in \mathcal{M}_d(A) \Rightarrow Y \in \mathcal{M}_d(A)$

(証略)

Theorem 3

$\exists M \in \mathcal{M}_d(A)$;

$$\mathcal{M}_d(A) = S[M] = \left\{ \int f(x_{s-}, x_s)\, dM_s \ ; \ f \in L^2(M) \right\}$$

(証略)

Remark 3

上のMはpath x_tから具体的に与えることが出来る.

その時, $n(x, dy)$; kernel が存在して

$$\left\langle \int f(x_{s-}, x_s)\, dM_s \right\rangle_t = \int_0^t \int_E f^2(x_{s-}, y)\, n(x_{s-}, dy)\, d\langle M\rangle_s$$

となることも, 予想される。

文献

[1] H. Kunita & S. Watanabe ; On square integrable martingales. Nagoya Math. Jour. vol. 30. (1967.)

[2]. P.A. Meyer ; Integrales Stochastiques I. II. III, IV. Seminaire de Probabilités. Univ. de Strasbourg (1966)

[3]. M. Motoo & S. Watanabe ; On a class of additive functionals of Markov Processes. Jour. of Math. of Kyoto Univ. vol. 4. No. 3 (1965)

[4] S. Watanabe ; On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov process. Jap. Jour. of Math vol XXXIV (1964)