数理解析研究所講究録
第74巻 1969年 89-102

ヒルベルト空間の値をとる
マルチンゲールの確率積分

名大理　国田　寛

§1. 序

$(\mathfrak{X}, \|\ \|)$ を reflexive, separable なバナッハ空間, $\mathfrak{X}^*$ をその dual な空間とする. (Ω, F_t, P) は可分な確率空間で, $F_s \subset F_t$ ($s \leq t$ のとき) とする. 写像 $X(\omega); \Omega \longrightarrow \mathfrak{X}$ がすべての $f \in \mathfrak{X}^*$ に対し, $(f, X(\omega))$ が可測なときに, X を $\mathfrak{X}$-値確率変数という. $\mathfrak{X}$-値確率過程の定義も同様である. X_t を $\mathfrak{X}$-値確率過程とすれば, $\|X_t\|$ は実数値確率過程となる. $\mathfrak{X}$-値確率過程 $X_t, t \geq 0$ が (i) $E(\|X_t\|) < \infty, \forall t < \infty$ かつ (ii) すべての $f \in \mathfrak{X}^*$ に対し $((f, X_t), F_t, P)$ がマルチンゲール, の二条件をみたすとき $\mathfrak{X}$-値マルチンゲールという. $\mathfrak{X}$-値マルチンゲールに関して次の proposition は容易にたしかめられる.

Proposition 1. X_t を $\mathfrak{X}$-値マルチンゲールとする.

(1) X_t は弱右連続な version をもつ。即ち，(a) $P(X_t = X_t^*) = 1$, $\forall t \geq 0$, (b) $\forall f \in \mathfrak{X}^*$ に対し (f, X_t^*) は t に関し右連続，をみたすマルチンゲール X_t^* が存在する。

(2) $\|X_t\|$ は劣マルチンゲール。特に X_t が弱(右)連続ならば $\|X_t\|$ は(右)連続である。

以下マルチンゲール X_t は弱右連続とする。

$\mathfrak{X}$-値マルチンゲールに関する確率積分 $\int \Phi dX$ は，被積分函数 $\Phi(t, \omega)$ を何にとるかにより次の三種が考えられる。

(I) $\Phi(t, \omega)$ が有界な実数値 very well 可測な函数のとき，$\int \Phi dX$ を $\mathfrak{X}$-値マルチンゲールとして定義する。$\Phi(t, \omega)$ が階段函数のとき，即ち $0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ と $\mathcal{F}_{t_n}$-可測な実数値有界函数 $\Phi_n(\omega)$ が存在して

$$\Phi(t, \omega) = \Phi_n(\omega) \qquad t_n \leq t < t_{n+1}$$

となっているとき，確率積分は

(1) $$\int_0^t \Phi dX = \sum_{t_n \leq t} \Phi_n (X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$$

で定義する。明らかに

(2) $$\left(f, \int_0^t \Phi dX\right) = \int_0^t \Phi d(f, X) \qquad \forall f \in \mathfrak{X}^*$$

をみたす．したがって，一般のΦに対しては

(3) $$(f, Y_t) = \int_0^t \Phi\, d(f, X), \qquad \forall f \in \mathfrak{X}^*$$

をみたすマルチンゲール Y_t^* が存在すれば，それをΦのXによる確率積分と定義してよい．

(II). $\Phi(t, \omega)$ が $\mathfrak{X}^*$-値確率過程で，$(f, \Phi(t,\omega))$, $f \in \mathfrak{X}$ が very well 可測のとき，$\int_0^t (\Phi, dX_s)$ を実数値マルチンゲールとして定義する．即ち $\Phi(t,\omega)$ が階段函数のとき，

$$\int_0^t (\Phi, dX) = \sum_{t_{n+1} \le t} (\Phi_n, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$$

とおけば上式の左辺は実数値マルチンゲールになる．

(III). (t, ω) を固定すれば，$\Phi(t,\omega)\,;\ \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^*$ が連続な線型作用素となっているとき，$\int \Phi\, dX$ を $\mathfrak{X}^*$-値マルチンゲールとして定義する．Φが階段函数のときは，(1)式によって定義すればよい．これが実際マルチンゲールになることは

$$\left(\int \Phi\, dX, \varphi\right) = \sum_{t_{n+1} \le t} (\Phi_n (X_{t_{n+1}} - X_{t_n}), \varphi) = \sum_{t_{n+1} \le t} (\Phi_n^* \varphi, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$$
$$= \int (\Phi^* \varphi, dX), \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{X}$$

によって(II)に帰着されることに注意すればよい．

上記の三種の確率積分が定義されるΦの class をもとめること

とは，一般のバナッハ空間では容易ではない．しかし$\mathcal{X}$がヒルベルト空間のときは，一次元マルチンゲールとほゞ同じ結果が得られるので以下それについてのべる．

§2. ヒルベルト空間の場合.

$(\mathcal{X}, (\ ,\ ))$をヒルベルト空間，$\|\ \|$をその内積から導びかれるノルムとする．以下確率積分を前節の三つの場合にわけて考える．

(I). $\mathcal{M} = \{X_t$; マルチンゲールかつ $E(\|X_t\|^2)<\infty, \forall t<\infty, X_0=0\}$ とおく．$\|X_t\|^2$は右連続な劣マルチンゲールだから，Meyerの分解により，natural な increasing process $\langle X\rangle_t$で$\|X_t\|^2-\langle X\rangle_t$がマルチンゲールになるものが唯一つ存在する．又$X, Y \in \mathcal{M}$に対し$\langle X, Y\rangle_t$を$\frac{1}{4}\{\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t\}$によって定義すれば

(4) $$E((X_t-X_s, Y_t-Y_s)|\mathcal{F}_s) = E(\langle X, Y\rangle_t - \langle X, Y\rangle_s|\mathcal{F}_s), \ \forall t\geq s,$$

がなりたつ．実際上式の左辺は，$X=Y$のとき，

$$E(\|X_t\|^2+\|X_s\|^2|\mathcal{F}_s) - 2E((X_t, X_s)|\mathcal{F}_s)$$

ところが $E((X_t, X_s)|\mathbb{F}_s) = \|X_s\|^2$ だから（一般に X が $\mathbb{F}$-可測 $\mathcal{H}$-値確率変数，Y が $\mathbb{F}'$-可測 $\mathcal{H}$-値確率変数で，$\mathbb{F} \subset \mathbb{F}'$，$E(\|X\|^2) < \infty$，$E(\|Y\|^2) < \infty$ ならば $E((X, Y)|\mathbb{F}) = E((X, E(Y|\mathbb{F}))|\mathbb{F})$ がなりたつ）

$$E(\|X_t - X_s\|^2 | \mathbb{F}_s) = E(\|X_t\|^2 - \|X_s\|^2 | \mathbb{F}_s) = E(\langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s | \mathbb{F}_s)$$

$X \neq Y$ も上式の $\langle X, Y\rangle$ の定義から (4) がなりたつことは明らか．

$$L_2(\langle X\rangle) = \left\{ \Phi(t, w) ;\ 実数値\ \text{very well}\ 可測,\ E\left(\int_0^t \Phi^2 d\langle X\rangle\right) < \infty \quad \forall t < \infty \right\}$$

とおけば

Theorem 1. $X \in \mathcal{M}$，$\Phi \in L_2(\langle X\rangle)$ に対し

(5) $$\langle Y, Z\rangle_t = \int_0^t \Phi\, d\langle X, Z\rangle \quad , \qquad \forall Z \in \mathcal{M}$$

をみたす $Y \in \mathcal{M}$ が唯一つ存在する．更にこの Y は

(6) $$(f, Y_t) = \int_0^t \Phi\, d(f, X) \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

をみたす．

証明は (4) 式及び次の不等式

$$E\left(\int |\Phi \Psi|\, d\langle X, Y\rangle\right) \leqq E\left(\int \Phi^2 d\langle X\rangle\right)^{\frac{1}{2}} E\left(\int \Psi^2 d\langle Y\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$$

を使えば一次元マルチンゲールとほとんど同じである．

Theorem 1 によって，直交射影等一次元マルチンゲールの理論と同じ事がなりたつ。まず $X, Y \in \mathcal{M}$ が $\langle X, Y\rangle_t \equiv 0$ をみたすとき直交するという。これは (X_t, Y_t) が一次元マルチンゲールであることと同値である。$\mathcal{M}$ の部分集合が，閉かつ linear で確率積分に関して閉じているとき，部分空間という。$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分空間とすれば任意の $X \in \mathcal{M}$ は $X_1 \in \mathcal{N}$ と $X_2 \in \mathcal{N}^{\perp} = \{X \in \mathcal{N}$ と直交する $Y \in \mathcal{M}$ の全体$\}$ との和に一意に分解される。更に $\mathcal{M}$ には可算個の互に直交する列 $\{X^n\}$ が存在して任意の $X \in \mathcal{M}$ は $X = \sum_{n=1}^{\infty} \int \Phi_n dX^n$ と表現される。（この様な $\{X^n\}$ が可算個であることは，モ 及び $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ が separable であることからわかる）$\mathcal{M}_c$ を強連続な $\mathcal{M}$ の元の全体，$\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_c^{\perp}$ とする。

Theorem 2. (1) $X_t \in \mathcal{M}$ で $X_t = Y_t - \tilde{Y}_t$ と書けるものは $\mathcal{M}_d$ で dense である。ただし Y_t は jump のみで変化する確率過程，$\tilde{Y}_t$ は強連続な確率過程で

(8) $$\sum_{t_n \leq t} \|\tilde{Y}_{t_n} - \tilde{Y}_{t_{n-1}}\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{（分割を細かくしたとき）} \quad \text{in } L_2\text{-sense}$$

をみたすもの。

(2). $X \in \mathcal{M}_d$ のとき

(9) $$\sum_{t_n \leq t} \|X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\|^2 \longrightarrow \sum_{s \leq t} \|\Delta X_s\|^2 \quad \text{in } L_2\text{-sense.}$$

（証明略）

(III). $\Phi(t,\omega)$ が $\mathcal{H}$-値確率過程で，すべての $\varphi\in\mathcal{H}$ に対し (Φ,φ) が very well 可測のとき，Φ を very well 可測という．$X\in\mathcal{M}$ に対し

$$\tilde{L}_2(\langle X\rangle)=\left\{\Phi;\ \mathcal{H}\text{-値 very well 可測かつ } E\left(\int_0^t\|\Phi\|^2d\langle X\rangle\right)<\infty,\ \forall t<\infty\right\}$$

とおく．$\Phi\in\tilde{L}_2(\langle X\rangle)$ が階段函数のとき，§1 で確率積分 $\int(\Phi,dX)$ を定義したが，それは

$$E\left(\left[\int(\Phi,dX)\right]^2\right)\leqq E\left(\int\|\Phi\|^2d\langle X\rangle\right)$$

をみたす．実際，$\int(\Phi,dX)=\sum_{t_n\leqq t}(\Phi_n,X_{t_{n+1}}-X_{t_n})$ であったから

$$E\left(\left[\int(\Phi,dX)\right]^2\right)=E\left(\sum_{n,m}(\Phi_n,X_{t_{n+1}}-X_{t_n})(\Phi_m,X_{t_{m+1}}-X_{t_m})\right)$$

ところが $n<m$ のとき

$$E\left((\Phi_n,X_{t_{n+1}}-X_{t_n})(\Phi_m,X_{t_{m+1}}-X_{t_m})\right)$$
$$=E\left((\Phi_n,X_{t_{n+1}}-X_{t_n})(\Phi_m,E(X_{t_{m+1}}-X_{t_m}|\mathcal{F}_{t_m}))\right)=0.$$

したがって

$$E\left(\left[\int(\Phi,dX)\right]^2\right)=E\left(\sum_n(\Phi_n,X_{t_{n+1}}-X_{t_n})^2\right)$$
$$\leqq E\left(\sum_n\|\Phi_n\|^2\|X_{t_{n+1}}-X_{t_n}\|^2\right)=E\left(\sum_n\|\Phi_n\|^2[\langle X\rangle_{t_{n+1}}-\langle X\rangle_{t_n}]\right)$$
$$=E\left(\int_0^t\|\Phi_n\|^2d\langle X\rangle\right).$$

さて $\Phi\in\tilde{L}_2(\langle X\rangle)$ に対して，階段函数の列で

$$E\left(\int_0^t \|\Phi-\Phi_n\|^2 d\langle X\rangle\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \forall t<\infty$$

をみたす $\{\Phi_n\}\subset L_2(\langle X\rangle)$ をとれば，$\int(\Phi_n, dX)$ は実数値マルチンゲール $\int(\Phi, dX)$ に収束する．なお，$\{\varphi^i\}$ を $\mathcal{X}$ の CONS とし，$\Phi^i=(\Phi,\varphi^i)$，$X^i=(X,\varphi^i)$ とおけば，

$$\int(\Phi, dX) = \sum_i \int \Phi^i dX^i$$

がなりたつ．ただし上式の右辺は実数値マルチンゲールによる確率積分である．

(III). $\Phi(t,\omega)$ は (t,ω) を固定すれば，$\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ の連続な線型作用素であり，すべての $\varphi\in\mathcal{X}$ に対し $\Phi(t,\omega)\varphi$ は very well 可測とする．Φ の Hilbert-Schmidt ノルムを

$$\|\Phi\|_2=\left[\sum_{k=1}^{\infty}\|\Phi^*\varphi_k\|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \{\varphi_k\} \text{ は CONS}$$

によって定義する．$\|\Phi\|_2$ は CONS $\{\varphi_k\}$ のとり方に関係しない．又 $\|\Phi\|_2=\|\Phi^*\|_2$ である．そこで

$$\tilde{\tilde{L}}_2(\langle X\rangle)=\left\{\Phi;\ \text{very well 可測かつ } E\left(\int_0^t\|\Phi\|_2^2 d\langle X\rangle\right)<\infty,\ \forall t<\infty\right\}$$

とおき，$\Phi\in\tilde{\tilde{L}}_2(\langle X\rangle)$ に対し，$Y=\int\Phi dX\in\mathcal{M}$ を次式によって定義する．

(10) $$(Y, \varphi) = \int (\Phi^* \varphi, dX) \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{X}.$$

このYの存在を示すために，形式的に

(11) $$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\Phi^* \varphi_k, dX) \varphi_k$$

とおく．もし(11)の右辺がL^2-収束すれば，それが(10)をみたすことは容易にたしかめられる．(11)の右辺の各項及びその和が存在することは，次の関係式によって保証される．

$$E\left(\left[\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\Phi^* \varphi_k, dX) \varphi_k\right]^2\right) = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (\Phi^* \varphi_k, dX)\right]^2\right)$$

$$\leq E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \|\Phi^* \varphi_k\|^2 d\langle X\rangle\right) = E\left(\int_0^t \|\Phi^*\|_2^2 d\langle X\rangle\right) < \infty.$$

§3. 確率積分の変換公式

まず有界変分をもつ$\mathfrak{X}$-値確率過程を定義する．$\mathfrak{X}$-値確率過程φ_tが

$$\sup_{\Delta} \sum_{t_n \leq t} \|\varphi_{t_n} - \varphi_{t_{n-1}}\| < \infty, \quad \Delta = \{0 < t_1 < t_2 < \cdots\}$$

をみたすとき有界変分をもつという．この様なφ_tと有界な very well 可測（スカラー，線型汎函数，線型作用素）$\Phi(t, \omega)$ にたいし，確率積分 $\int \Phi d\varphi$ が定義されることは明らかで

ある.

$\mathfrak{X} \longrightarrow R^1$ の写像 F が,

$$F(x+h) - F(x) = (F'(x), h) + \frac{1}{2}(F''(x)h, h) + o(\|h\|^2), \quad {}^\forall h \in \mathfrak{X}$$

をみたすとき, 二回微分可能という. ただし $F'(x)$ は $\mathfrak{X}$ の線型汎函数, $F''(x)$ は $\mathfrak{X}$ の線型作用素である. $F'(x)$ 及び $F''(x)$ が x に関して強あるいは作用素のノルムで連続のとき, F は二回連続的微分可能という.

Theorem 3. F ; $\mathfrak{X} \longrightarrow R$ が二回連続的微分可能で, $\|F'(x)\|$, $\|F''(x)\|_2^2$ が x に関し有界とする. $X \in \mathcal{M}$ で, φ : 有界変分, $A_t = X_t + \varphi_t$ とすると

$$F(A_t) - F(A_0) = \int_0^t (F'(A_s^-), dX_s) + \frac{1}{2}\langle \int F''(A_s^-) dX^c, X^c \rangle_t$$
$$+ \int_0^t (F'(A_s^-), d\varphi_s) + \sum_{\|\Delta X_s\| > 0} \left[F(A_s) - F(A_s^-) - (F'(A_s^-), X_s - X_s^-) \right].$$

ただし X^c は X の $\mathcal{M}^c$ への射影, A_s^- は A_s の s での左極限である.

略証. $X_t^d \equiv X_t - X_t^c$ は $Y_t - \tilde{Y}_t$ と書けて, Y_t 及び $\tilde{Y}_t$ は Theorem 2 の条件をみたすとする. $\{T_n\}$ を X_t, Y_t, $\tilde{Y}_t$ 及び φ_t の ε-chain とする (ノルムに関して). $T_n \wedge t$ を簡単のために再び T_n と書けば,

$$F(A_t)-F(A_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(A_{T_n})-F(A_{T_{n-1}})\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(A_{T_n}^-)-F(A_{T_{n-1}})\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(A_{T_n})-F(A_{T_n}^-)\right]$$

ところが

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(A_{T_n}^-)-F(A_{T_{n-1}})\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(F'(A_{T_{n-1}}),\ A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(F''(A_{T_{n-1}})(A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}),\ A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}o\left(\|A_{T_n}^- - A_{T_{n-1}}\|^2\right)$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\sum\left(F'(A_{T_{n-1}}),\ X_{T_n}-X_{T_{n-1}}\right)+\sum\left(F'(A_{T_{n-1}}),\ \varphi_{T_n}-\varphi_{T_{n-1}}\right)$$

$$-\left(F'(A_{T_{n-1}}),\ \Delta X_{T_n}\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_0^t\left(F'(A_s^-),\ dX_s\right)+\int_0^t\left(F'(A_s^-),\ d\varphi_s\right)-\sum_{\|\Delta X_s\|>0}\left(F'(A_s^-),\ \Delta X_s\right)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\sum\left(F''(A_{T_{n-1}})(X^c_{T_n}-X^c_{T_{n-1}}),\ (X^c_{T_n}-X^c_{T_{n-1}})\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left(F''(A_{T_{n-1}})(X^c_{T_n}-X^c_{T_{n-1}}),\ (\cancel{X^c}\psi_{T_n}-\psi_{T_{n-1}})\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left(F''(A_{T_{n-1}})(\psi_{T_n}-\psi_{T_{n-1}}),\ X^c_{T_n}-X^c_{T_{n-1}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\left(F''(A_{T_{n-1}})(\psi_{T_n}-\psi_{T_{n-1}}),\ \psi_{T_n}-\psi_{T_{n-1}}\right)$$

ただし $\psi_t=\varphi_t-\tilde{\varphi}_t$. 上式の才一項は $\langle\int F''(A_s^-)dX^c,\ X^c\rangle$ に収束する. 二, 三, 四項は 0 に収束する. ($\sum_n\|\psi_{T_n}-\psi_{T_{n-1}}\|^2\to 0$

($\varepsilon \to 0$) を使えばよい). I_3 も 0 に収束する. したがって定理が得られる.

付記 正規過程の上に定義されたマルチンゲール.

$X_t, t \geq 0$ を $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ 上の確率過程, $\mathbb{B}_t = \mathbb{B}(X_s; s \leq t)$ とする. $(\Omega, \mathbb{B}_t, P)$ 上の平均 0, 二乗可積分なマルチンゲールの作る空間を $\mathfrak{M}$ とする. $\mathfrak{M}$ と X_t との関連を調べることは興味ある問題である. 例えば $X_t = (B_t^1, \cdots, B_t^N)$ が N-次元ブラウン運動のとき, $\mathfrak{M}$ の base は $\{B_t^1, \cdots, B_t^N\}$ であることが知られている. 以下 X_t が正規過程のとき $\mathfrak{M}$ の構造を調べる.

正規過程の飛田の表現には, Hellinger-Hahn の定理が有効であるが, マルチンゲールの立場から証明を与える. 簡単のため, X_t は連続とする. まず t を任意に固定し, $Y_s^t = E(X_t | \mathbb{B}_s)$ とおけば Y_s^t は s に関し正規なマルチンゲールである. したがって $0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ に対し $Y_{s_4}^t - Y_{s_3}^t$ と $Y_{s_2}^t - Y_{s_1}^t$ は直交する. ゆえに $Y_{s_4}^t - Y_{s_3}^t$ と $Y_{s_2}^t - Y_{s_1}^t$ は独立である. ゆえに Y_s^t は s に関し加法過程になっている. 今 $\{Y^t\}$ ($t \in [0, \infty)$) から生成される $\mathfrak{M}$ の部分空間を $\mathfrak{M}'$ とする. $\mathfrak{M}'$ の base として, 各元を正規加法過程から選ぶ. $Y_t^n = Y_t^{t_n}$ ($\{t_n\}$ は $[0, \infty)$ で dense) に Schmidt の直交化を行えば

$$X^n = Y^n - P_{L(X^1,\cdots,X^n)} Y^n$$

が正規過程になる．実際，まず Y^1 と Y^2 は jointly に正規だから $\langle Y^1\rangle$, $\langle Y^2\rangle$, $\langle Y^1, Y^2\rangle$ は ω に無関係となる．ゆえに $\Phi(s) = d\langle Y^1, Y^2\rangle_s / d\langle Y^1\rangle_s$ も ω に無関係．したがって $P_{L(Y^1)} \equiv \int \Phi(s)\, dY^1$ は正規である．これより X^2 が正規になる．一般に X^n が正規になることも同様である．この結果を使えば正規過程 X_t の表現は次の様にして得られる．$Y_s^t = E(X_t | \mathbb{B}_s) \in \mathfrak{M}'$ だから，$Y_s^t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi_n(t,s,\omega)\, dX_s^n$ と表現される．ところが Y_s^t と X_s^n は jointly に正規だから $\Phi_n(t,s,\omega) \equiv d\langle X^n, Y^t\rangle_s / d\langle X^n\rangle_s$ は ω に無関係．ゆえに $X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi_n(t,s)\, dX_s^n$ を得る．

次に $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ を示す．このためには，有限回以上の微係数が恒等的に 0 になる $F \in C^\infty(R^N)$ $(\exists N)$ と，jointly に正規なマルチンゲール $Y^1, \cdots, Y^N$ に対し

$$E(F(Y_t^1, \cdots, Y_t^N) | \mathbb{B}_s) - \text{定数}$$

が s に関するマルチンゲールとみて $\mathfrak{M}'$ に属することを示せば十分である．簡単のため，$N=1$, $Y_t^1 = Y_t$ とする．確率積分の公式によって

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t F'(Y_u)\, dY_u + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Y_u)\, d\langle Y\rangle_u .$$

(Y_t は連続)．ゆえに

$$E(F(Y_t)\,|\,\mathbb{B}_s) = F(Y_0) + \int_0^{t\wedge s} F'(Y_u)\,dY_u + \frac{1}{2}\int_0^t E(F''(Y_u)\,|\,\mathbb{B}_s)\,d\langle Y\rangle_u .$$

右辺の第一項は定数 (a.e.), 第二項は $\mathcal{M}'$ に属するから, "第三項－定数" が $\mathcal{M}'$ に属することを言えばよい.

$$E(F''(Y_u)\,|\,\mathbb{B}_s) = F''(Y_0) + \int_0^{u\wedge s} F^{(3)}(Y_v)\,dY_v + \frac{1}{2}\int_0^u E(F^{(4)}(Y_v)\,|\,\mathbb{B}_s)\,d\langle Y\rangle_v$$

だから

$$\frac{1}{2}\int_0^t E(F''(Y_u)\,|\,\mathbb{B}_s)\,d\langle Y\rangle_u = \frac{1}{2}\Big[F''(Y_0)\langle Y\rangle_t + \int_0^t \Big[\int_0^{u\wedge s} F^{(3)}(Y_v)\,dY_v\Big] d\langle Y\rangle_u$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \Big[\int_0^u E(F^{(4)}(Y_v)\,|\,\mathbb{B}_s)\,d\langle Y\rangle_v\Big] d\langle Y\rangle_u \Big]$$

上式の右辺の第二項は

$$\langle Y\rangle_t \int_0^{s\wedge t} F^{(3)}(Y_v)\,dY_v - \int_0^{t\wedge s} \langle X\rangle_v F^{(3)}(Y_v)\,dY_v \in \mathcal{M}'.$$

第三項について同じ議論をくり返せば $E(F(Y_t)\,|\,\mathbb{B}_s)$ － 定数 が $\mathcal{M}'$ に属することが証明される.

文　献

Ю. Л. Далецкий, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, УСПЕХИ МАТЕ. НАУК (1967), т. XXII, 3 − 54.

H. Kunita, S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30 (1967), 209 − 245.