数理解析研究所講究録
第77巻 1969年 99-117

Involution をもつ位相環上の調和解析

九州大学　冨田稔

§1. Generalized Fourier analysis.

I. M. Gelfand はその著書 Generalized functions Vol. 4 の中で involution をもつ位相環上の正値双線型形式，および正値線型汎関数の概念を導入し，その理論を Generalized Fourier analisis と呼んで超関数論や群の表現論の統一的研究に有効なことを示した。この意味での Generalized Fourier analisis はそれ自身作用素環論における大きな未解決の分野を構成しており，また，この理論の発展によって非有界正値線型汎関数の基本的性質を論ずる道を開くことが出来る。この小論では上の意味の Generalized Fourier analysis を発展させるために Hilbert 空間の上に observable および pseudoobservable という概念を導入し議論を obserbalile algebra の研究に帰着させることが出来る事を示す。Obserbalile algebra の構造については近く論文を発表する予定である (cf [4]).

いま分離連続な乗法をもつ局所凸複素線型位相環 $\mathfrak{A}$ で，その中に involution $a \to a^*$ が定義されているものを考え，これを位相 *-代数と呼ぶ。$\mathfrak{A}$ から適当な Hilbert

空間$\mathfrak{H}$上の作用素環への連続$*$－準同型写像πを$\mathfrak{A}$から$\mathfrak{H}$への作用素表現と呼び，また$\mathfrak{A}$から$\mathfrak{H}$への連続線型写像λで条件

$$\lambda(ab) = \pi(a)\lambda(b) \tag{1}$$

をみたすものを（πに関する）$\mathfrak{A}$のvector表現と呼ぶ。

$\mathfrak{A}$のvector表現λに対して，それから誘導される正値双線型型式φ：

$$\varphi(a, b) = (\lambda(a), \lambda(b)) \tag{2}$$

を考えれば，これは次の式をみたしている。

1. $\varphi(a, a) \geqq 0,$ (3)
2. $\varphi(a, b)$ は a, b について quasilinear (4)
3. $\varphi(ab, c) = \varphi(b, a^* c),$ (5)
4. $\varphi(ab, ab) \leqq \|\pi(a)\|^2 \varphi(b, b).$ (6)

$\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$上の汎関数$\varphi$で上の4つの条件をみたすものを$\mathfrak{A}$の$\pi$に関する表現可能な型式という。

いまφを$\mathfrak{A}$の連続な正値双線型型式とし，適当なHilbert空間$L^2(\varphi)$およびある$\mathfrak{A}$から$L^2(\varphi)$への連続な線型写像λで条件(2)を満足するものを構成する。このときφが表現可能であるための必要十分条件はλが$L^2(\varphi)$上の適当な作用素表現π_φに対するvector表現になっている事である。

$\mathfrak{A}$上の線型汎関数Pで条件

$$p(a^* a) \geqq 0 \tag{7}$$

f. $$p(a^*) = \overline{p(a)} \tag{8}$$

をみたすものは正値であるという。

p から誘導された $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ 上の正値双線型型式 p° を

$$p^\circ(a, b) = p(b^* a) \tag{9}$$

で定義するとき，p° が（π に関して）表現可能であれば p は（π に関して）表現可能であるという。

§1. 位相 $*$ ー代数の特異拡大と Hilbelt 空間上の observable.

位相 $*$ ー代数 $\mathfrak{A}$ からある Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への作用素表現を π とするとき，これから $\mathfrak{A}$ を拡大したある位相 $*$ ー代数 $T(\mathfrak{A}, \pi)$ を構成し，これを $\mathfrak{A}$ の（π に関する）特異拡大と呼ぶ．$T(\mathfrak{A}, \pi)$ は位相空間としての積空間 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ の中に次のような $*$ ー代数としての演算を持っているものである．α を scalar，$A = (a, x, y)$，$B = (b, u, a)$ を $T(\mathfrak{A}, \overline{u})$ の要素とすれば αA，$A + B$，A^*，AB は次のように定義される。

$$\alpha A = (\alpha a, \alpha x, \bar{\alpha} y), \quad A + B = (a + b, x + u, y + v),$$
$$A^* = (a^*, y, x), \qquad AB = (ab, \pi(a)u, \pi(b)^* y),$$

次の定理は容易に証明することが出来る。

定理 1.1. $\mathfrak{A}$ を位相 $*$ ー代数，π を $\mathfrak{A}$ のある Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への作用素表現とすれば，$T(\mathfrak{A}, \pi)$ は位相 $*$ ー代数

で次のような作用素表現π_0およびvector表現λをもつ。$A \in T(\mathfrak{A}, \pi)$に対して$A = (a, x, y)$ならば

$$\pi_0(A) = \pi(a), \quad \lambda(A) = x.$$

$\mathfrak{A}$が等長なinvolutionをもつBanach$*$-代数であれば$T(\mathfrak{A}, \pi)$の要素$A = (a, x, y)$のnormを

$$\|A\| = (\|a\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義すれば次の定理1.2が成立する．

定理1.2．定理1.1における$\mathfrak{A}$が等長な*involution*をもつBanach$*$-代数であれば，$T(\mathfrak{A}, \pi)$はやはり等長なinvolutionをもつBanach$*$-代数である。

特別な場合としてHilbert空間$\mathfrak{H}$上の連続線型作用素全体の作るC*-代数を$P(\mathfrak{H})$として，$\mathfrak{H}$上への自然表現に関する$P(\mathfrak{H})$の特異拡大を$T(\mathfrak{H})$であらわす。$T(\mathfrak{H})$の要素をobservableと呼べばobservable Aは$P(\mathfrak{H})$の要素$\pi(A)$，および$\mathfrak{H}$の2要素$\lambda(A)$, $\lambda(A^*)$の3重対

$$A = (\pi(A), \lambda(A), \lambda(A^*))$$

として表わされ，そのnormは次式であたえられる。

$$\|A\| = (\|\pi(A)\|^2 + \|\lambda(A)\|^2 + \|\lambda(A^*)\|).$$

定理1.2より直ちに次の定理がある。

定理1.3．Hilbert空間$\mathfrak{H}$上のobservable全体$T(\mathfrak{H})$は等長なinvolutionをもつBanach$*$-algebraである。

$A \to \pi(A)$ は $T(\mathfrak{H})$ を $P(\mathfrak{H})$ 上へ写す連続な $*-$homomorphism であり，$A \to \lambda(A)$ は π に関する $T(\mathfrak{H})$ の vector 表現であり，従って次式を満足する

$$\lambda(AB) = \pi(A)\lambda(B).$$

位相 $*-$代数 $\mathfrak{A}$ からある Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の observable によって作られる normed $*-$代数上への一様に連続な $*-$準同型写像 τ が存在するとき，τ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への observable 表現という。 作用素表現，vector 表現および observable 表現の間の関係を次の 2 定理によって述べることが出来る。

定理 1.4. τ が位相 $*-$代数 $\mathfrak{A}$ の observable 表現ならば，$\pi\circ\tau$ は $\mathfrak{A}$ の作用素表現で，$\lambda\circ\tau$ は $\pi\circ\tau$ に関する $\mathfrak{A}$ の vector 表現である。

定理 1.5. 位相 $*-$代数 $\mathfrak{A}$ の作用素表現 π と π に関する $\mathfrak{A}$ の vector 表現 λ に対しては次のような $\mathfrak{A}$ の observable 表現 τ が存在する。

$$\tau(a) = (\pi(a), \lambda(a), \lambda(a^*)).$$

§2. pseudoobservable と正値線型汎関数の表現

φ を位相 $*-$代数 $\mathfrak{A}$ 上の表現可能な型式とする。φ に対して

$$p(b^* a) = p^{\circ}(a, b) = \varphi(a, b)$$

をみたす正値線型汎関数は例え $L^2(\varphi)$ 上の作用素表現 π_φ が非縮退であっても必ずしも存在するとは限らない。その例と

してHilbert空間$\mathfrak{H}$上のobservable全体$T(\mathfrak{H})$の上の基本型式

$$\varphi(A, B) = (x(A), x(B))$$

を考える。pが$\varphi = p^{\circ}$をみたす$T(\mathfrak{H})$上の正値線型汎関数であるとすれば，$T(\mathfrak{H})$の要素$X = (0, x, 0)$に対して$X^* X = 0$であるにも拘らず

$$p(X^* X) = \varphi(X, X) = \|x\|^2 \neq 0$$

となる矛盾が起きる．

位相$*$－代数$\mathfrak{A}$上の表現可能な型式φが与えられた時，φに関する$\mathfrak{A}$の特異拡大$S(\mathfrak{A}, \varphi)$を次のように定義する。Cを複素数体とする。$S(\mathfrak{A}, \varphi)$は線型位相空間としての積空間$\mathfrak{A} \times C$の中に乗法及びinvolutionを次式によって定義したものである。(a, α)および(b, β)が$S(\mathfrak{A}, \varphi)$の要素であれば

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \varphi(b^* a)),$$
$$(a, \alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha}).$$

容易に次の定理を証明することが出来る。

定理２．１．　φが位相$*$－代数$\mathfrak{A}$上の表現可能な型式であれば$S(\mathfrak{A}, \varphi)$は位相$*$－代数である．$(a, \alpha) \rightarrow a$は$S(\mathfrak{A}, \varphi)$を$\mathfrak{A}$上に写す連続な$*$－準同型写像であり$S(\mathfrak{A}, \varphi)$上の連続な正値線型汎関数

$$\mu(a,\alpha) = \alpha .$$

を考えれば μ から誘導される表現可能な正値双線型型式 μ° は次式をみたしている。

$$\mu^\circ((a,\alpha),(b,\beta)) = \mu((b,\beta)^*(a,\alpha))$$
$$= \varphi(a,b).$$

定理2.2. 定理2.1.における $\mathfrak{A}$ が等長な involution をもつ Banach $*$－代数であれば $S(\mathfrak{A},\varphi)$ は次の norm により等長な involution をもつ Banach $*$－代数になる。

$$\|(a,\alpha)\| = (\|a\|^2 + (\alpha)^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の Banach $*$－代数 $T(\mathfrak{H})$ に対してその基本型式 φ に関する特異拡大を $S(\mathfrak{H})$ であらわし，その要素を pseudoobservable と呼ぶ。この定義によって $\mathfrak{H}$ の pseudoobservable A はある observable $\tau(A)$ と scalar $\mu(A)$ の対

$$A = (\tau(A), \mu(A))$$

でありその norm は次式で定められる。

$$\|A\| = \|\tau(A)\|^2 + \|\mu(A)|^2 .$$

$\tau(A)$ は3重対 $\tau(A) = (\pi\circ\tau(A), \lambda\circ\tau(A), \lambda\circ\tau(A^*))$ であるから A は更に4重対

$$A = (\pi\circ\tau(A), \lambda\circ\tau(A), \lambda\circ\tau(A^*), \mu(A))$$

で表わされる。 $\tau(A)$ を A の observable 表現，$\mu(A)$ を A の期待値という。 定理2.2から直ちに次の定理が出る。

定理 2．3． Hilbert 空間 $\mathfrak{h}$ 上の pseudoobservable 全体 $S(\mathfrak{h})$ は等長な involution をもつ Banach*－代数である。 $A \to \tau(A)$ は $S(\mathfrak{h})$ を $T(\mathfrak{h})$ 上に写す連続*－準同型であり，期待値 μ は $S(\mathfrak{h})$ 上の表現可能な正値線型汎関数で次式を満足する。

$$\mu(B^{*}A)=\mu^{\circ}(A,B)=(\lambda\circ\tau(A),\ \lambda\circ\tau(B)).$$

位相*－代数 $\mathfrak{A}$ から $S(\mathfrak{h})$ の部分*－代数への一様な連続*－準同型写像 τ を $\mathfrak{A}$ の pseudoobservable 表現という。次にこの表現と表現可能な正値線型汎関数との関係を次の2定理として述べる。

定理 2．4． σ が位相*－代数 $\mathfrak{A}$ の pseudoobservable 表現であれば (a)． $\pi\circ\tau\circ\sigma$ は $\mathfrak{A}$ の作用素表現である。

(b)． $\lambda\circ\tau\circ\sigma$ は $\pi\circ\tau\circ\sigma$ に関する $\mathfrak{A}$ の vector 表現である。

(c)． $\mu\circ\sigma$ は $\mathfrak{A}$ 上の表現可能な連続線型汎関数であって次式を満足する。

$$\mu\circ\sigma(b^{*}a)=(\lambda\circ\tau\circ\sigma(a),\ \lambda\circ\tau\circ\sigma(b))$$

定理 2．5． 位相*－代数 $\mathfrak{A}$ 上の表現可能な正値線型汎関数 p に対して，p° を p から誘導された表現可能な型式とし，$L^{2}(p^{\circ})$ を $L^{2}(p)$ であらわす，$L^{2}(p)$ 上への $\mathfrak{A}$ の作用素，

vector および observable 表現をそれぞれ π_p, λ_p および τ_p であらわせば $\mathfrak{A}$ は次式によって定義される pseudoobservable 表現 σ_p をもつ.

$$\sigma_p(a) = (\tau_p(a),\ p(a))$$
$$= (\pi_p(a),\ \lambda_p(a),\ \lambda_p(a^*),\ p(a)).$$

このとき p は次の式をみたす。

$$p(a) = \mu \circ \sigma_p(a).$$

§3. Obserbable algebra と pseudoobserbable algebra $\mathfrak{H}$ を Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ とするとき $T(\mathfrak{H})$ の閉$*$-部分環を observable algebra, $S(\mathfrak{H})$ の閉$*$-部分環を pseudoobserbable algebra と呼ぶ.

pseudoobserbable algebra を obserbable algebra から構成する方法を決定するのは比較的容易である。

pseudoobservable algebra $\mathfrak{A}$ は, $\mathfrak{A}$ 上の observable 表現 τ が$*$-isomorphic であるとき有限であるといい, 有限でないとき無限であるという。有限な pseudoobservable algebra は次のようにして構成される。Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の要素 A および $\mathfrak{H}$ 上の連続線型作用素 A に対して observable $\tau_g(A)$ および pseudoobservable $\sigma_g(A)$ を次のように定義する。

$$\tau_g(A) = (A,\ Ag,\ A^*g),\quad \sigma_g(A) = (\tau_g(A),\ (Ag,\ g))$$

定理3.1. $\mathfrak{A}$が Hilbert 空間$\mathfrak{H}$上の有限な pseudoobservable algebra である為の必要かつ十分な条件はあるC^{∞}ー代数$\mathfrak{A}$および$\mathfrak{H}$の要素gを用いて$\mathfrak{A} = \sigma_g(\mathfrak{L}_e)$とあわすことが出来ることである。

無限な pseudo C^*-algebra の構成法は次の通りである。

定理3.2. $\mathfrak{A}$が Hilbert 空間$\mathfrak{H}$上の無限な pseudo-observable algebra であるための必要十分条件は，$\mathfrak{A}$がある$\mathfrak{H}$上の observable algebra $\mathfrak{L}_e$の基本型式に関する特異拡大$S(\mathfrak{L}_e)$になっている事である。

定理3.1. 3.2の証明は容易であるが，ここでは省略する。observable algebra をどのようにしてあるC^*-algebra から構成するかという議論についてはここで結論だけをのべる。$\pi(A) = 0$をみたす observable を0-作用 observable という。0-作用 observable 全体$N(\mathfrak{H})$は次の内積によって Hilbert 空間になる。

$$(A, B) = (\lambda(A), \lambda(B)) + (\lambda(B^*), \lambda(A^*))$$

$N(\mathfrak{H})$の任意の閉*-部分空間は乗法について$AB = 0$をみたす observable algebra になるのでこれを0-作用 observable algerbra と呼ぶ。Hilbert 空間$\mathfrak{H}$上の observable algebra $\mathfrak{A}$に対して，集合$(\pi(A)x : x \in \mathfrak{H}, A \in \mathfrak{A})$を含む最小の閉線型空間を$[\pi(\mathfrak{A})\mathfrak{H}]$であらわし，

その上への射影を $P_{\mathfrak{A}}$ とする。また $(AB : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{A})$ を含む最小の閉線型集合を $[\mathfrak{A}^2]$ で表わす。もし $\lambda(\mathfrak{A})$ が $[\pi(\mathfrak{A})\mathfrak{H}]$ に含まれていれば $\mathfrak{A}$ は非縮退であるという。observable algebra $\mathfrak{A}$ が非縮退であるための必要十分条件は $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}^2]$ が成立することである。

一般にある observable algebra $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} + \mathfrak{N}$ の形にかける。ただし $\mathfrak{L}$ はある非縮退 observable algebra で，$\mathfrak{N}$ は $N([\pi(\mathfrak{A})\mathfrak{H}]^{\perp})$ の閉*一部分空間である。上の分解 $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} + \mathfrak{N}$ に対して product algebra $\mathfrak{L} \times \mathfrak{N}$ を考へ，その中に norm および involution を

$$\langle A, X \rangle^* = \langle A^*, X^* \rangle,$$

$$\|\langle A, X \rangle\| = (\|A\|^2 + \|X\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

で定義すれば $A + X \longrightarrow \langle A, X \rangle$ は $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{L} \times \mathfrak{N}$ へ写す等長*一同型写像である。

0以外の0一作用 observable を含まない observable algebra は正則であるという。Observable algebra は正則であるとき，その時に限って半単純になる。一般に非縮退 observable algebra $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} + N(S)$ の形にかける，ここに $\mathfrak{L}$ はある正則な observable algebra であり，S は $[\pi(\mathfrak{L})\mathfrak{H}]$ に含まれて $[\lambda(\mathfrak{L})]$ に垂直な閉部分空間である。今 $\mathfrak{L}$ の作用素表現 π を空間 S に制限したもの

をΠ_Sであらわし，$\mathfrak{L}$のπ_Sに関する特異拡大$T(\mathfrak{L}, \Pi_S)$を考える。$T(\mathfrak{L}, \Pi_S)$の要素を$\langle A, a_1, a_2 \rangle$であらわせば，

$$A + (0, a_1, a_2) \longrightarrow \langle A, a_1, a_2 \rangle$$

は$\mathfrak{A}\,(=\mathfrak{L} + N(S))$を$T(\mathfrak{L}, \pi_S)$の上へ写す等長な$*$－同型写像である。

最後に正則なobservable algebra $\mathfrak{A}$は次のようにして構成される。今Hilbert空間$\mathfrak{H}$上のC^*－代数$\mathfrak{L}$を考える。有向集合Λの各点に$\mathfrak{H}$の要素g_αが定義されていて，次の条件をみたすとき$\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$を$\mathfrak{L}$に関する正則系と呼ぶ。

(a). $\|Ag_\lambda\| \leqq \|Ag_\mu\|$ ($\lambda < \mu$のとき)，

(b). $\lim_\lambda Ag_\lambda$はAが$\mathfrak{L}$のある稠密な$*$－部分代数に属するとき収束する。

今$\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$を$\mathfrak{L}$に関する正則系とし，$\lim_\lambda Ag_\lambda$ $\lim_\lambda A^*g_\lambda$が共に収束するような$A \in \mathfrak{A}$全体を$\mathfrak{L}_0$であらわす。$A \in \mathfrak{L}_0$に対して$\tau(A)$を

$$\tau(A) = (A, \lim Ag_\lambda, \lim A^*g_\lambda)$$

で定義すれば，$\mathfrak{L}_0$は$\mathfrak{L}$の稠密な$*$－部分代数であって，写像$A \longrightarrow \tau(A)$による$\mathfrak{L}_0$の表現環$(\mathfrak{L}_0)$はobservable algebraである。正則なobservable algebraは常に

上のような C^*ー代数 $\mathfrak{L}_e$ および $\mathfrak{L}_e$ に関する正則系 $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ によって作られる observable algebra $\mathcal{T}(\mathfrak{L}_{e_0})$ に一致する。

§4. 表現可能な正値双線型型式の分解

位相 * ー代数 $\mathfrak{A}$ 上の表現可能な型式を §3 の結果を用いて分類することができる。φ を $\mathfrak{A}$ 上の表現可能な型式とし，$L^2(\varphi)$ 上の作用素表現を π_φ，これに関する vector 表現を λ_φ とする。また π を $\|\pi(a)\| \geqq \|\pi_\varphi(a)\|$ をみたす任意の $\mathfrak{A}$ の作用素表現とする。

φ は $\pi_\varphi = 0$ のとき，すなわち $\varphi(ab, c) \equiv 0$ がつねに成立するとき，初等的であるという。また π_φ が $L^2(\varphi)$ 上で非縮退であるとき，φ は非縮退であるという。

φ は，$\pi(a_n) \longrightarrow 0$ かつ $\lambda_\varphi(a_n) \longrightarrow x$ であれば必ず $x = 0$ という条件をみたすとき，正則であるといい，$L^2(\varphi)$ の任意の要素 x に対して $\pi(a_n) \to 0$ かつ $\lambda_\varphi(a_n) \to x$ をみたす列 $\{a_n\}$ が存在するとき特異であるという。集合 $(\pi_\varphi(a)x : x \in L^2(\varphi),\ a \in \mathfrak{A})$ を含む最小の閉線型集合上への射影を P とし，$\pi(a_n) \longrightarrow 0$ および $\lambda_\varphi(a_n) \longrightarrow x$ となるような列 $\{a_n\}$ が $\mathfrak{A}$ の中に存在するような $L^2(\varphi)$ の要素 x 全体の空間上への射影を N とする。P，N を用いて次の射影を定義する。

$$F = p(1-N),\quad S = pN,\quad Z = (1-p)N.$$

一般に K が $L^2(\varphi)$ 上の正値 Hermite 型式で，表現代数 $\pi_\varphi(\mathfrak{A})$ と可換であれば，正値双線型型式 φ_K を

$$\varphi_K(a, b) = (K\lambda_\varphi(a), \lambda_\varphi(b))$$

によって定義するとき，φ_K は表現可能である。従って φ に対して分解

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_Z = \varphi_F + \varphi_N = \varphi_F + \varphi_S + \varphi_Z$$

を考えれば，φ_p, φ_N, φ_F, φ_S, φ_N などは表現可能な型式であるが，更に次のことを示すことが出来る。φ_p は非縮退，φ_N は特異，φ_F は正則，φ_S は真に特異，φ_Z は初等的である。

また次の定理が成立する。

定理． 表現可能な $\mathfrak{A}$ 上の型式 φ が真に特異である為の必要十分条件は，φ が非縮退であり，$L^2(\varphi)$ 上の observable 表現 τ_φ に対して表現代数 $\tau_\varphi(\mathfrak{A})$ の閉包が $\pi_\varphi(\mathfrak{A})$ の閉包の π_φ に関する特異拡大になっていることである。

表現可能な型式 φ は $L^2(\varphi)$ の中に次のような条件をみたす要素 g が存在するとき有限であるという。

$$\lambda_\varphi(a) = \pi_\varphi(a)g.$$

二つの表現可能な正値型式 φ，ψ に対して，もし $\varphi-\psi$ が正値型式であれば $\varphi \geqq \psi$ と書く事にする。

定理． 表現可能な形式 φ に対して，$\varphi \geqq \psi$ であるような有限な表現可能型式全体を $\mathfrak{F}$ とすれば次の関係が成立する。

$$\varphi_F(a, a) = \sup_{\psi \in \mathfrak{F}} \psi(a, a)$$

上の定理から φ が特異であるための必要十分条件は $\varphi \geqq \psi$ をみたす有限な表現可能型式 ψ が 0 以外には存在しないことであり，φ が正則であるための必要十分条件は φ が $\varphi \geqq \psi$ をみたす有限な表現可能型式 ψ 全体の上限に一致することであることがわかる。

§5. 特異正定値測度および正定値超関数の存在

G を連続 Lie 群とし，G 上の Schwartz 空間 $\mathfrak{D}(G)$，すなわち compact な carrier をもつ無限回微分可能な関数全体の作る線型位相空間を考える。$\mathfrak{D}(G)$ は群代数として位相 $*$－代数になる。$\mathfrak{D}(G)$ の2要素 f, g の積 $f \circ g$ は G の左側不変速度に関する重畳

$$f \circ g(x) = \int f(y) g(y^{-1}x)\, dy$$

であり，f の involution f^* は G の modular 関数 $\Delta(x)$ を用いて次のようにあらわされる。

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1}) \overline{f(x^{-1})} .$$

ただし，$\Delta(x)$ は次の条件をみたす G 上の連続関数である。

$$\int f(x)\, dx = \int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1})\, dx .$$

$\mathcal{D}(G)$上の連続線型汎関数は超関数と呼ばれるが，特に$\mathcal{D}(G)$上で正値なときこれを正定値超関数と呼ぶ。

$\mathcal{D}(G)$上の正値双線型型式 $\varphi(f, g)$ については次の定理が知られている。

定理．$\mathcal{D}(G)$上の連続な正値双線型型式 $\varphi(f, g)$ が

$$\varphi(fg, h) = \varphi(g, f^* h)$$

をみたせば，φ は表現可能であって，適当なG上の正定値超関数μによって次のように表わされる。

$$\mu(g^* f) = \varphi(f, g).$$

上の定理によってG上の正定値超関数μおよび誘導された型式μ°は必らず「表現可能」で非縮退である。しかし必ずしも正則であるとは限らない。次にμが特異になる例をのべよう。今3次元実vector空間Gの中に次のように乗法を定義する。

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1 + a_2 b_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Gは可解Lie群であって通常のLebesgue測度がその両側不変測度になっている。いまR^2の要素$u = (u_2, u_3)$に対してGの$L^2(-\infty, +\infty)$上へのunitary表現U_aを次のように定める。

$$U_a f(x) = e^{i(u_2 u_3 a_1 + u_2 a_2 x)} f(x + u_3 a_3)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(G)$に対する積分作用素

$$L\varphi = \int \varphi(a) U_a da$$

は次のような積分作用素として表わされる。

$$L_\varphi f(x) = \int \phi(x, y) f(y) dy,$$

$$\phi(x, y) = u_3^{-1} \int \varphi(a_1, a_2, \frac{y-x}{u_3}) e^{i(u_2 u_3 a_1 + u_2 a_2 x)} da_1 da_2.$$

$\varphi \to \Phi$ は $\mathcal{D}(G)$ から Schmitt 型積分作用素の作る $*$-algebra 内への $*$-準同型であり

$$p_{m,\lambda}(\varphi) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^m \partial y^m} \phi(x, y) \Big/_{x=y=\lambda}$$

は $\mathcal{D}(G)$ 上の既約表現を誘導する正定値超関数で真に特異である. 特に $m = 0$ の場合は正定値測度である。

§6. C^*-代数上の非有限正値汎関数

C^*-代数 $\mathfrak{A}$ の正の要素全体 $\mathfrak{A}^+$ 上で定義された汎関数 p が次の条件をみたしているとき，これを $\mathfrak{A}^+$ の正値線型汎関数と呼ぶ。

$$0 \leqq p(A) \leqq +\infty$$

$$p(A+B) = p(A) + p(B),$$

$$p(tA) = t p(A),$$

もし p が次の条件をみたせばこれは正則であるという。

$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty$ をみたす $\mathfrak{A}^+$ の列 $\{A_n\}$ に対しては

かならず $$p\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$$

が成立する。

正値線型汎関数 p は，その有限部分

$$\mathfrak{A}(p) = (A \in \mathfrak{A} : p(A^* A + AA^*) < \infty)$$

が $\mathfrak{A}$ の中で norm について稠密なとき p は擬有限であ る(quasifinite) という。

定理 6.1. C^*－代数 $\mathfrak{A}$ において $\mathfrak{A}^+$ 上の擬有限な正値線型汎関数 p が正則になるための必要十分条件は

$$p(A) = \sup_{g \in \Lambda} g(A)$$

をみたすような有限な正値線型汎関数の集合 Λ が存在することである。

定理 6.1 と共に次の定理が成立し，Dixmier によって提起された問題(p.55.[1]) が殆ど解決されたことになる。この問題については今の所汎関数が unitary 有界である場合を取扱った Pederson の結果があるだけである。

定理 6.2. Von Neumann 代数 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}^+$ 上の normal なかつ $\mathfrak{A}(p)$ が $\mathfrak{A}$ で強稠密な正値線型汎関数 p があるとき，p に対して

$$p(A) = \sup_{g \in \Lambda} g(A)$$

が成立するような normal な有限正値線型汎関数の集合 Λ が存在する。

参考論文

[1]. J. Dixmier, Les algébres d'opérateurs dans léspace Hilbertien. Paris (1957)

[2]. J. Pedersen, Measure theory for C*-algebras, Math. Scand. 19(1966) 131-145.

[3]. M. Tomita, Standard forms of von Neumann algebras.

[4]. M. Tomita, Fourier analysis on topological algebra with involution and Standard form of von Neumann algebra. (In preparation).