数理解析研究所講究録
第79巻 1969年 20-32

函数論から見たHardy classについて

東北大学理学部　山下慎二

1. 本講ではRiemann面上のHardy classの函数について主として論ずる事といたします. 大まかに分類しますと:

(1) Riemann面R上のHardy class $H_p \equiv H_p(R)$ $(0<p<\infty)$の定義および正則函数がH_pに入る為の必要十分条件.

(2) $H_p(R)$の函数の境界挙動.

(3) $H_p(R)$の函数のlevel curveについて.

(4) 平面上の領域のHardy classの函数の接続について.

このうち著者にとって最も興味のあるのは(4)であって, 特に$p=1$が接続のいみで限界になっている点は注意すべき性質ではないかと管見しています.

(1)～(4)の結果はいずれも著者の三つの論文[6], [7], [8]に含まれます. 尚, そこではHardy classよりも広いclassについて論じてあります. 完全ではありませんが文献案内を附録としました.

2. Hardy class の定義，その他．

簡単のため本講では Riemann 面 R は hyperbolic すなわち少くも一つ R 上に Green 函数が存在するとする．R 上の正則函数を f とすると $|f|^p$ $(0<p<\infty)$ は劣調和函数である．R 上の Hardy class $H_p \equiv H_p(R)$ $(0<p<\infty)$ とは R 上の正則函数 f で $|f|^p$ が R 上 harmonic majorant をもつものの全体を言う；ここに，$|f|^p$ の R 上 harmonic majorant h とは R 上の調和函数で，

$$|f(z)|^p \leqq h(z), \quad z \in R$$

を満すものを言う．

(注) R が開円板 $|z|<1$ のときは周知のように

$$\sup_{0\leqq r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty$$

で $f \in H_p$ を定義する．我々の定義はこの拡張である (cf. [6])．

次に R 上で調和な函数 u が擬有界 (quasi-bounded) であるとは，R 上，

$$u = u_1 - u_2$$

と表わせて，u_1, u_2 は

$$u_{nj} \uparrow u_j \quad \text{as } n \uparrow \infty \quad (j=1,2),$$

u_{nj} $(n=1,2,\cdots)$ は $\geqq 0$，有界，調和 on R (収束は pointwise 従って locally uniform)，であるときをいう．

(注) R が開円板 $U: |z|<1$ のときは，$u(z)$ が U で擬有界調和であることと，$u(z)$ がその（Fatou の定理により a.e. に存在する）angular limits $u(e^{i\theta})$, $e^{i\theta}\in K$, $K=\partial U$, の Poisson 積分で表わされる事と同値である。すなわち $z=re^{it}\in U$ として

$$u(re^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}u(e^{i\theta})\,d\theta.$$

定理 1.（[6]） f は R 上正則であるとする．$f\in H_p(R)$ $(0<p<\infty)$ である為の必要十分条件は，$|f|^p$ が R 上，擬有界な *harmonic majorant* を持つ事である．

これは *de la Vallée Poussin* および *Doob* の結果を使って，*Solomentsev* (*Соломенцев*)-*type* の定理（cf. *Lemma* 3, [6]; *Heins* [2]）を証明し，これの一つの系として得られる．

(注) なお，*uniformization theory* を使っても証明出来るが，*Solomentsev-type* の定理は例えば *Green space* に於ても成立するので，この場合の証明は調和函数論の立場から云えば一般的ではないようにおもえる．

この定理の系を一つ述べよう．それは *removable singularity* あるいは *null set* の研究と関連する．$E\subset R$ を *closed polar set* (cf. [1]) とする．$f\in H_p(R-E)$ $(0<p<\infty)$ であれば，$\exists\, F\in H_p(R)$ で，F の $R-E$ への制限は f に一致す

る。(Parreau [4], cf. [6].)

3. Hardy classの函数の境界挙動.

本節の議論は開円板の場合のanalogyとしても興味があるように思える.

まずRiemann面 R のcompactification R^* とは次を充たすものを言う.

(C. 1) R^* は compact Hausdorff space.

(C. 2) R から R^* への into homeomorphism φ があって $\varphi(R)$ は R^* で open かつ dense である。

$\varphi(R)$ と R とを identify して, $\Delta = R^* - R$ を R の ideal boundary という.

さて, R 上の擬有界調和な函数に, ちょうど $U: |z|<1$ の場合のPoisson積分表示に相当するものを許すような R^*, 従って Δ はないか. このような R^* は R.S.Martin (1941) によって(primitiveではあるがessentialな形で) 定義された。このとき§2,(注)の angular limit $u(e^{i\theta})$ に相当するものは何か. これは Cartan-Brelot-Doob-Naïm (Naïm, thèse, 1957) による Δ の点における fine limit である("fine" = "細かい").

いま R^* を R の Martin compactification とし, $\Delta = R^* - R$ を R の Martin boundary としよう. するとMartin kernel $K(z,\xi)$ $(z\in R, \xi\in\Delta)$ が存在して次を充たす：

R上の調和函数 u が R 上擬有界であるための必要十分条件は u の fine limit $u^*(\xi)$ が Δ上 $d\omega$-a.e. に存在して,

$$u(z)=\int_\Delta K(z,\xi)\,u^*(\xi)\,d\omega(\xi) \qquad (z\in R,\ \xi\in\Delta)$$

と表わされる事である. ここに, $d\omega$ は

$$1\equiv\int_\Delta K(z,\xi)\,d\omega(\xi),\quad \forall z\in R$$

を満すΔ上の Baire measure である。

(注) $K(z,\xi)$ は Poisson kernel, $d\omega$ は $(1/2\pi)d\theta$ に相当する。

R上の劣調和函数 v の the least harmonic majorant $v^\wedge$ とは v の harmonic majorant であって, しかも v の如何なる harmonic majorant h (i.e., $v\leq h$ on R) に対しても, R上 $v^\wedge\leq h$ が成り立つものを言う.

定理 2. Riemann 面R上の正則函数 f が $H_p(R)$ $(0<p<\infty)$ に入る為の必要十分条件は, Δ上 $d\omega$-a.e. に fine limit $f^*(\xi)$ of f が存在し,

$$\left(|f(z)|^p\right)^\wedge=\int_\Delta K(z,\xi)\,|f^*(\xi)|^p\,d\omega(\xi)$$

と表わされる事である.

(注) $f^* \in L_p(\Delta, d\omega)$.

4. Hardy class の函数の level curves.

Riemann面 R 上の正則函数を f とし, $\alpha > 0$ に対して,

$$\mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{L}_\alpha(f) = \{z \in R \ ; |f(z)| = \alpha\}$$

を α-level curve of f と呼ぶ. $\mathcal{L}_\alpha$ は $w = f(z)$ による, w-平面上の円周 $|w| = \alpha$ の逆像であって, 高々可算個の R 上の正則曲線からなる. $\alpha \nearrow +\infty$ としたとき, $\mathcal{L}_\alpha$ はどのように"減少"するであろうか. またその"減少の度合"を測る量はあるであろうか.

いま F を R の閉部分集合とし,

$$\omega_F(z) = \inf\{s(z) ; s \text{ は } R \text{上優調和}, \geqq 0 \text{ 且つ}, s \geqq 1 \text{ quasi-everywhere on } F\}$$

$z \in R$, とおく. これを F の R 上, z で測った harmonic measure と呼ぼう. 大ざっぱな言い方をすると, ω_F は F 上で 1 その他では調和且つ $0 \leqq \omega_F \leqq 1$ である. この一般化については [1] を参照.

<u>定理 3.</u> ([7]) $f \in H_p(R)$ $(0 < p < \infty)$ であれば,

$$(*) \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha^p \cdot \omega_{\mathcal{L}_\alpha}(z) = 0$$

が $\exists z \in R$（従って $\forall z \in R$）に対して成立する.

(注)$_1$ 逆が成立するか，すなわち正則函数 f が $\exists z \in R$ に対して $(*)$ を満せば，$f \in H_p(R)$ かどうかは知られていないようである.

(注)$_2$ もっと詳しく，$f \in H_p(R)$ なれば $0 \leqq x < \infty$ での単調増加凸函数 $\Phi(x) \geqq 0$ で

$$\lim_{x \to +\infty} \{\Phi(x)/x\} = +\infty \qquad かつ,$$

$$(*) \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \Phi(\alpha^p)\, \omega_{\mathcal{L}_\alpha}(z) = 0, \ \exists z \in R,$$

であるものの存在が知られている（cf. [7]）.

5. Hardy class の函数の接続について.

D_1, D_2 を z-平面の Jordan 領域とし，$D_1 \cap D_2 = \emptyset$ 且つ I は D_1, D_2 の空でない共通境界上にある単純開弧とする. f_j を D_j で正則な函数とするとき（$j=1,2$），領域 $D_1 \cup I \cup D_2$ で正則な函数 F で

$$(\overset{*}{**}) \quad F(z) \equiv f_j(z), \quad z \in D_j \quad (j=1,2)$$

を満すものが存在する為の十分条件を調べる.

一般に D_j 内の，$\zeta \in I$ に終る弧 L^j_ζ とは，

1° L^j_ζ は D_j に含まれる単純開曲線，

2° L_ζ^j の始点は D_j 内にあり，その終点は ζ である，を満すものを言う（$j=1,2$）．

定理 4.（[8]） $p>1$，$f_j \in H_p(D_j)$（$j=1,2$）とし，I は滑らか，すなわち I の各点で接線が unique に存在し，その実軸と為す角度は連続的に変化するとする．$E \subset I$ は of linear measure zero であるとする．いま，$\forall \zeta \in I-E$ に対して D_j 内の，ζ に終る弧 L_ζ^j（$j=1,2$）が存在して，

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in L_\zeta^1}} f_1(z) = \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in L_\zeta^2}} f_2(z)$$

を満すとする．このとき $D_1 \cup I \cup D_2$ で正則な函数 F で，(⁂) を満足するものが存在する．

(注) 証明は，Hardy class と深い関係にある class E_p の性質と，等角写像の一定理を使って行われる．

定理 5.（[8]）定理 4 に於て，$f_j \in H_1(D_j)$ とし，I を正則曲線であるとし，あとの条件はそのまゝとすれば，同じ結論を得る．

(注) 定理5における条件 $f_j \in H_1(D_j)$ を条件: ある q, $0<q<1$ に対して $f_j \in H_q(D_j)$ $(j=1,2)$ と置き換える事は出来ない。その反例は [8] に述べてある。従って §1 に述べた如く、$p=1$ がこのいみでの限界となっている。

定理5の一つの結果として、次の Rudin の問題([5]) に対する $p \geqq 1$ の場合の negative な解答を得る。

Rudin の問題 (Q_1): 次の条件を満す $p>0$ は存在するか?

(条件) E を z-平面 $\mathbb{Z}$ 上の任意の対数容量正な compact set で、$\mathbb{Z}-E$ が領域となるものとすると、必ず Hardy class $H_p(\mathbb{Z}-E)$ が non-constant な函数を含む。

いま E^* を直線上にある totally disconnected compact set で of linear measure zero 且つ、対数容量 >0 であるようにとる。このような E^* の例はよく知られている。定理5によって $p \geqq 1$ であるかぎり、$H_p(\mathbb{Z}-E)$ は定数しか含みえない。

6. (5の続き) Neuwirth-Newman の定理.

一般に Hardy class H_p $(0<p<1)$ の函数を調べる場合に F. Riesz の分解等を使って、H_q $(q \geqq 1)$ の函数に帰着して考えることが多い。ここでは Neuwirth-Newman [3] の定理の著者による一般化を説明する。

U は開円板 $|z|<1$, K は円周 $|z|=1$ そして I を K 上の open arc とする.

定理 6. ([9]) $f\in H_{1/2}(U)$ とし f の K 上 a.e. に存在する radial limit (存在は良く知られている)を $f(e^{i\theta})$ とする.

$$f(e^{i\theta})\geqq 0 \quad \text{for a.e. } e^{i\theta}\in I$$

であるならば, 閉弧 $K-I$ の extended plane $|z|\leqq\infty$ に関する補集合 $\mathscr{C}(K-I)$ に於ける正則函数 F を見い出して

$$F(z)\equiv f(z) \quad , \quad z\in U$$

ならしめ得る.

証明は Riesz 分解を使って H_1 に帰着させる. Liouville の定理と定理6から 直ちに次を得る:

系. ([3]) 定理 6 において

$$f(e^{i\theta})\geqq 0 \quad \text{for a.e. } e^{i\theta}\in K$$

とすれば f は constant.

(注) 定理6もその系も $f \in H_{1/2}$ の意味で sharp である example が知られている。なお，inner function の接続に関する一定理 [10] も参照されたい。

7. 文献案内.

Hardy class を函数論の立場から見た文献を二三述べる.

(P) И.И.Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950. 独訳 I.I. Priwalow, Randeigenschaften analytischer Funktionen, Berlin, Deutscher Verlag, 1956.

および

(G) Г.М.Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Изд. «Наука», 1966. (изд. 2е). 独訳 G.M. Golusin, Geometrische Funktionentheorie, Berlin, Deutscher Verlag, 1957.

は詳しい. 尚, H_p と関連のある E_p class の研究はソビエトで盛んのようである. ($H_p \Leftrightarrow$ Poisson 積分 ; $E_p \Leftrightarrow$ Cauchy 積分).

また,

(T) M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Tokyo, Maruzen, 1959.

もある. この方面の綜合報告として,

(TH) Г.Ц. Тумаркин и С.Я. Хавинсон, Классы аналитических функций в многосвязных областях, « Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексн. перем. », М., Физматгиз, 1960, 45–77. (佛訳があるようである).

および

(Ha) С.Я. Хавинсон, Аналитических функции ограниченного вида (Граничные и экстремальные свойства), Итоги Науки, М., 1965

は必読である. また最近出た

(He) M. Heins, Hardy classes on Riemann surfaces, Lecture Notes in Math., No. 98, Berlin, Springer, 1969

は Riemann 面の分類に関する新しい結果を含んでいる. また, vector-valued analytic functions の Hardy class についてもふれてある.

References

1. C. Constantinescu – A. Cornea : *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer, Berlin, 1963.
2. M. Heins : *On the theorem of Szegö-Solomentsev*, Math. Scand. 21 (1967), 281–289.
3. J. Neuwirth – D. J. Newman : *Positive $H^{1/2}$ functions are*

constants, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 985.

4. M. PARREAU: *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann*, Ann. Inst. Fourier, 3 (1952), 103–197.

5. W. RUDIN: *Analytic functions of class H_p*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 46–66.

6. S. YAMASHITA: *On some families of analytic functions on Riemann surfaces*, Nagoya Math. J. 31 (1968), 57–68.

7. ——————: *On level curves of harmonic and analytic functions on Riemann surfaces*, ibid. 34 (1969), 77–87.

8. ——————: *Some remarks on analytic continuations*, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 328–335.

9. ——————: *A remark on Neuwirth and Newman's paper: "Positive $H^{1/2}$ functions are constants,"* Proc. Amer. Math. Soc. Oct. 1969.

10. ——————: *Continuations of analytic functions of class S and class U*, Nagoya Math. J., *to appear*.