数理解析研究所講究録
第79巻 1969年 44-57

Topological algebraのスペクトルについて

東教大・理　神保敏弥

§1. 序

topological algebra Eのスペクトル$S(E)$が，どのようになっているかを調べることは一つの問題であった。ここでは[5], [7], [8], [9]を中心として，単位元を持つBanach algebraのスペクトルの元の特徴やlocally convex algebra，正則関数のalgebra，ε-productのときなどのスペクトルについて述べる。

§2. Banach algebraのmultiplicative linear functional

Aを単位元をもつ可換複素Banach algebraとし，A'をAのdual space，$S(A)$をAのすべてのmultiplicative linear functionalsの集合[13]，A^{-1}をAの可逆元の全体と

する．$x \in A$ のスペクトルを $\Delta(x)$ とする，即ち $\Delta(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin A^{-1}\}$ である．

$f \in \mathcal{S}(A)$ の一つの良く知られた性質は，$\{x \in A \mid f(x) = 0\}$ が A の maximal ideal であり，M が A の maximal ideal ならば，或る $g \in \mathcal{S}(A)$ が存在して，$M = \{x \in A \mid g(x) = 0\}$ と表わせる，ということである．最近，$f \in \mathcal{S}(A)$ の別の性質を Kahane と Zelazko [7] は，x のスペクトルを用いて，次のように表わした。

__定理1__．A が単位元をもつ可換複素 Banach algebra ならば，$f \in \mathcal{S}(A) \iff$ (1) $f \in A'$ (2) $f(x) \in \Delta(x)$, $^{\forall} x \in A$.

証明．$\Rightarrow$ は明らか。$\Leftarrow$ を示す：(2) より $f(e) = 1$，$x \in A$ に対し $\varphi(\lambda) = f(\exp(\lambda x))$ とおくと，$\varphi(\lambda)$ は整関数である．又 (2) より $\varphi(\lambda) \neq 0$ であるから，ある整関数 $\psi(\lambda)$ で $\varphi(\lambda) = \exp(\psi(\lambda))$ と表わせる．$|\varphi(\lambda)| \leqq \|f\| \exp(|\lambda| \|x\|)$ より，ある $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$ とかけ，$\varphi(0) = 1$ より $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$ となる．したがって，

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n!} \lambda^n$$

$\therefore f(x^n) = f(x)^n$，$n = 2$ のときから $f(xy) = f(x) f(y)$ を得る．

__注意__．定理1は real Banach algebra に対しては，正し

くない．又定理1は次の定理と同値である： X が A の subspace ならば，X が maximal ideal $\Leftrightarrow$ codim $X=1$，$X\subset A-A^{-1}$．

系1．X は compact Hausdorff space とし，A を $C(X)$ の subalgebra とする，かつ $1\in A$．μ は X 上の Radon measure で $\forall x\in X$ に対して，ある $p_x\in X$ が存在して，$\int_X x\,d\mu=x(p_x)$ とかけるならば

$$\int_X xy\,d\mu=\int_X x\,d\mu\int_X y\,d\mu,\ \forall x,y\in A.$$

証明．$f(x)=\int_X x\,d\mu$ とおき，f を A から supremum norm に関する completion $\overline{A}$ に拡張し，$\overline{A}$ に対する定理1を用いればよい．

系2．A_1，A_2 は それぞれ単位元をもつ可換 Banach algebra とする，A_2 は semi-simple とする．T は A_1 から A_2 の中への 有界線形写像 で $\Delta(Tx)\subset\Delta(x)$，$\forall x\in A_1$ を満たすものとする．$\Rightarrow$ $Txy=Tx\,Ty$，$\forall x,y\in A_1$

証明．$f\in\mathfrak{S}(A_2)$ に対して $F(x)=f(Tx)$，$\forall x\in A_1$ とおくと $F\in A_1'$ かつ $F(x)\in\Delta(x)$ より $F\in\mathfrak{S}(A_1)$．故に $f(Txy)=f(Tx)f(Ty)=f(Tx\,Ty)$．$f$ の任意性と A_2 の semi-simple より結論を得る．

注意．系2は，A_2 が semi-simple を欠くと正しくない．

§3. 正則関数の algebra のスペクトル

この節では，Riemann domain と Stein space の正則関数の algebra の場合について述べる。

対 (X, p) が Riemann domain とは，(1) X が Hausdorff space (2) $p: X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は局所位相同型のときを言う。
$\mathcal{O}_X$ を Riemann domain (X, p) 上の正則関数の algebra，$S(\mathcal{O}_X)$ を $\mathcal{O}_X$ のスペクトルとする。$f \in \mathcal{O}_X$ に対して $\hat{f}(h) = h(f)$, $\forall h \in S(\mathcal{O}_X)$ によって $\hat{f}$ を定義し，$h_x(f) = f(x)$, $\forall f \in \mathcal{O}_X$ によって h_x を定める。次の定理は，スペクトル $S(\mathcal{O}_X)$ に自然な Riemann domain の構造を導入できることを言っている。

<u>定理2</u>. (X, p) を separable Riemann domain とし，$\hat{p} = (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_n)$ とおく。$\Rightarrow$ $(S(\mathcal{O}_X), \hat{p})$ には以下の性質を持つ Riemann domain の構造を与えることができる：

(1) 写像 $g: x \longrightarrow h_x$ が holomorphic,

(2) E を $g(X)$ と交わる $S(\mathcal{O}_X)$ の成分の合併とするとき，
$\hat{g}: \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_X$ が isomorphism,

(3) (Y, p') が Riemann domain で $\hat{\varphi}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ が isomorphism であるような正則写像 $\varphi: X \longrightarrow Y$ が存在するならば，$g = \psi \circ \varphi$ であるような正則写像 $\psi: Y \longrightarrow S(\mathcal{O}_X)$ が存在する。(cf. [5]).

証明. 略. (Complex analytic manifold については cf. [1])

次に$(X, \mathcal{O})$を analytic space とするとき Xが Stein space とは (1) Xが countable topology をもつ (2) Xが holomorphically convex (3) $x \in X$に対して, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_X$が存在して $\mathrm{rank}_x(f_1, \cdots, f_n) = \dim t_x X$ ($\dim t_x$ は tangential dimension) (4) $x \neq y \in X$に対して $f(x) \neq f(y)$となる$f \in \mathcal{O}_X$が存在する, (ここで$\mathcal{O}_X$は X上の正則関数の algebra である.) を満たすときをいう.

KがXの compact のとき, Kの holomorphically convex hull $\hat{K}$は, $\{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_K, \forall f \in \mathcal{O}_X\}$で定義されるもので, $A(K)$は, $\mathcal{O}_X$の関数のK上での一様極限である連続関数の algebra とする.

X上の Oka-Weil domain Wとは (1) Wが relatively compact (2) 次の(イ),(ロ)を満すφが存在する (イ) φ: $\overline{W}$の近傍 $\longrightarrow \mathbb{C}^n$ は holomorphic mapping (ロ) $\varphi|W$ はWから$\mathbb{C}^n$の多重円板(半径1)内の closed subvariety の上への biholomorphic mapping, を満たすときをいう.

<u>定理3.</u> $(X, \mathcal{O})$を Stein space, KをXの compact subset とする。$\Longrightarrow$ $S(A(K)) = \hat{K}$. (cf. [5])

証明. $x \in \hat{K}$とし, $l_x(f) = f(x), \forall f \in \mathcal{O}_X$で$l_x$を定めると$l_x$は$A(K)$上の homomorphism を定義する. $x \longrightarrow l_x$ は $\hat{K} \longrightarrow S(A(K))$の中への continuous 1-1 map である.

逆に $h \in S(A(K))$ とせよ．W は $f_1, \cdots, f_t \in \mathcal{O}_X$ で定義された $W \supset \hat{K}$ なる Oka-Weil domain とせよ．$V = \{ z \in \mathbb{C}^t \mid z_i = f_i(x),\ x \in \dot{W} \}$ とおく．$\|f_i\|_{\hat{K}} < 1$ より $z_0 = (h(f_1), \cdots, h(f_t)) \in$ 半径1の多重円板 $\Delta(0,1)$．今 $z_0 \notin V$ とすると，ある $F \in \mathcal{O}_{\Delta(0,1)}$ が存在して $F(z_0) \neq 0$，$F \equiv 0$ on V とできる．F を多項式近似して矛盾を得 $z_0 \in V$ がわかる．さらに $z_0 \notin \hat{K}$ とすると，$z_0 = (f_1(x_0), \cdots, f_t(x_0))$，$x_0 \in W$ とかけているので，ある $G \in \mathcal{O}_X$ が存在して $|G(x_0)| > \|G\|_K$ とできる．
$W_\varepsilon = \{ x \in W \mid |f_i(x)| \leq 1 - \varepsilon,\ i = 1, \cdots, t \}$ は holomorphically convex である，ε は $W_\varepsilon \ni x_0$ととる．この W_ε 上で G に一様収束する $f_1, \cdots, f_t$ の多項式 P_n が存在する．故に $|G(x_0)| = \lim |P_n(x_0)| = \lim |h(P_n)| = |h(G)| \leq \|G\|_K$．これは矛盾．$\therefore x_0 \in \hat{K}$，故に $h = \ell_{x_0}$．証明終り．

これを用いて次の定理を得る．

<u>定理4</u>．$(X, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}_X$ が X の点を分離し，$\mathcal{O}_X$ が local coordinates を与える純次元の complex space とせよ．
X は Stein $\Longleftrightarrow X = S(\mathcal{O}_X)$．（cf. [5]）

§4．$E \otimes_{\mathcal{T}} F$ のスペクトル

E，F は locally convex (locally m-convex) algebra とする．tensor product algebra $E \otimes F$ 上の位相 $\mathcal{T}$ が，

$E\otimes F$の構造でもって compatible とは，次の条件を満たすときである。

(1) $\mathcal{J}$を備えた$E\otimes F$が locally convex (locally m-convex) algebra（これを$E\otimes_{\mathcal{J}} F$と表わしこの completion を$E\hat{\otimes}_{\mathcal{J}} F$とかく）。

(2). $E\times F$から$E\otimes_{\mathcal{J}} F$の中への canonical bilinear map が個別的に連続.

(3) $f\in E'$, $g\in F'$に対して，$f\otimes g\in (E\otimes_{\mathcal{J}} F)'$. ここで
$f\otimes g$は $z=\sum_i x_i\otimes y_i \in E\otimes F$に対して
$f\otimes g(z)=\sum_i f(x_i)g(y_i)$で定義される。

(4) M, NがE', F'の equicontinuous subset ならば
$M\otimes N$は$(E\otimes_{\mathcal{J}} F)'$の equicontinuous subset.

$E\otimes_{\mathcal{J}} F$のスペクトル$S(E\otimes_{\mathcal{J}} F)$と$E$, Fのスペクトル$S(E)$, $S(F)$との関係は次の定理で与えられる。

<u>定理5.</u> [9]. E, Fは commutative locally convex algebra とする。$E\otimes_{\mathcal{J}} F$は compatible topology $\mathcal{J}$を与えられた$E\otimes F$とする。

$$\Longrightarrow \quad S(E\otimes_{\mathcal{J}} F)=S(E)\times S(F)$$

証明. bijective: $h\in S(E\otimes_{\mathcal{J}} F)$とすると，ある$a\otimes b\in E\otimes F$が存在して，$h(a\otimes b)\neq 0$より

$$f(x) = \frac{1}{h(a\otimes b)} h(ax\otimes b), \quad x \in E$$

(ハ)

$$g(y) = \frac{1}{h(a\otimes b)} h(a\otimes by), \quad y \in F$$

と定義すると，f，g は continuous であり，$(f,g) \in S(E) \times S(F)$ である．逆に $(f',g') \in S(E)\times S(F)$ ならば，定義の(3)より $f'\otimes g' \in (E\otimes_J F)'$，$h = f'\otimes g'$ とおき，h から(ハ)により定められたものを f, g とすると，$h = f\otimes g$ (cf. [12]) である．このとき $f' = f$，$g = g'$ となる．

次に $(f,g) \longrightarrow h = f\otimes g$ の連続性：$(f_i, g_i)_{i\in I}$ は (f,g) に収束する $S(E)\times S(F)$ の net とすると $f_i \to f$，$g_i \to g$ である．$x\otimes y \in E\otimes_J F$ に対して，

$h_i(x\otimes y) = f_i(x)g_i(y) \longrightarrow f(x)g(y) = h(x\otimes y)$.

逆に，$h \longrightarrow (f,g)$ (f, g は(ハ)による)の連続：$(h_i)_{i\in I}$ は h に収束する $S(E\otimes_J F)$ の net とする．$a\otimes b \in E\otimes_J F$ をとって $h(a\otimes b) \neq 0$ とできるので

$f(x) = h(ax\otimes b)/h(a\otimes b)$，$x \in E$，ならば，$f(x)$ の近傍 U に対して $f_i(x) = h_i(ax\otimes b)/h_i(a\otimes b) \in U$，$\forall i \geq i_U$ である $i_U \in I$ が存在する．故に $f_i \longrightarrow f$ in $S(E)$．

他方も同様であり連続性が言えた．

系　E, F を commutative locally convex algebras, $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{S}(F)$ は それぞれ E', F' の equicontinuous subset とする. $\Rightarrow$ $\mathcal{S}(E\hat{\otimes}_\tau F) = \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(F)$

証明. 前の定理の前半より bijective は明らか. 定義の(4)によって $\mathcal{S}(E\otimes_\tau F)$ は $(E\otimes_\tau F)'$ の equicontinuous subset である. 又 $\mathcal{S}(E\otimes_\tau F)$ と $\mathcal{S}(E\hat{\otimes}_\tau F)$ は位相空間として一致している.

§5. $\mathcal{S}(E)$の局所同程度連続.

E を locally convex algebra で $\mathcal{S}(E)$を Eのスペクトルとする. Eが m-barreled とは, すべての吸収的円形凸閉 idempotent subset が0の近傍となるときを言う. $\mathcal{S}(E)$が locally equicontinuous とは 各$f \in \mathcal{S}(E)$に対して, equicontinuous subset である fの近傍U_fが存在するときを言う. 次の定理は, [8]による.

定理6. Eが m-barreled locally convex algebra とし, (1) $\mathcal{S}(E)$は locally compact (Hausdorff) space.

(2) $\mathcal{S}(E)$は locally equicontinuous.

このとき(1) $\Rightarrow$ (2). Eが単位元eを持てば (2) $\Rightarrow$ (1).

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): U_fは $f \in \mathcal{S}(E)$ の compactな近傍とする. Uの極集合$U^\circ \equiv \{ x \in E \mid |\langle g, x\rangle| \leq 1, \forall g \in U_f\}$ は

m-barrel となるので 0の近傍である．
故に $U \subset U^{\circ\circ}$ は $S(E)$の equicontinuous subset である．
(2)⇒(1)： $E \ni e$ より $S(E)$は E'の weakly closed subset である．U_fが fの equicontinuous 近傍ならば，$\overline{U}$は E'の equicontinuous subset である．故に $\overline{U} \cap S(E)$は fの compact 近傍である．

系 Eは m-barreled locally convex algebra とし，$A \subset S(E)$ ならば，Aが weakly relatively compact
$\Longleftrightarrow$ Aが weakly bounded.

次に Gel'fand map の連続性を考える．Eは locally convex algebra とし，$C(S(E))$は $S(E)$上のすべての複素数値連続関数の algebra で compact 一様収束の位相をもつとする．このとき Gel'fand map gは，$g: x \longrightarrow \hat{x}$，$^{\forall}x \in E$，である．ここで $\hat{x}$は，$\hat{x}(f) = f(x)$，$^{\forall}f \in S(E)$ によって定義される．このとき次の定理が成り立つ[8]．

定理7．Eを locally convex algebra とするならば，
Gel'fand map $g: E \longrightarrow C(S(E))$が連続
$\Longleftrightarrow$ $S(E)$のあらゆる compact subset が equicontinuous.

証明．$A \subseteq S(E)$が (weakly) compact とすると，gが連続 $\Longleftrightarrow$ $g_A: E \longrightarrow C_u(A)$ が連続（$C_u(A)$ は 一様収束の

のtopology をもつとする). $\Leftrightarrow$ A が equicontinuous.

系. E が m-barreled locally convex algebra

$\Rightarrow$ Gel'fand map は連続.

証明. $A \subset S(E)$ が compact $\Rightarrow$ A° は m-barrel で 0 の近傍. 故に $A^{\circ\circ}$ ($\supseteq A$) は E' の equicontinuous subset である.

§6. ε-product に関するスペクトル.

E, F を locally convex space とし, , E'_c は E 内の compact な disc 上での一様収束の位相を与えられた E の dual space E' とし, $\mathcal{L}(E'_c, F)$ は, $E'_c \longrightarrow F$ への連続な線形写像のベクトル空間とし, $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F)$ は E' 内の linear functionals の equicontinuous sets 上での一様収束の位相を与えられた $\mathcal{L}(E'_c, F)$ とする.

ここでは ε-product の定義を

$$E \varepsilon F = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F) = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c ; E), \quad (\text{cf } [2], [11])$$

とする (後の $=$ は isomorphism の意味).

$\mathcal{F}$ は second countable topological space 上の topological sheaf とし, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ は U 上の $\mathcal{F}$ の連続な) 横断の空間を表わす. このとき, $\mathcal{F} \varepsilon E$ は presheaf $\{\Gamma(U, \mathcal{F}) \varepsilon E,\ U \subset X \text{ open}\}$ によって定義された X 上

の sheaf とする．次の命題より $\mathcal{F}\varepsilon E$ は 又 topological sheaf であることがわかる [2]．

<u>命題</u>．$\mathcal{F}$ は上に述べたもの，E は locally convex space．

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(U, \mathcal{F}\varepsilon E) = \Gamma(U, \mathcal{F})\varepsilon E, \quad {}^{\forall}\text{open } U \subset X.$$

以下では，$(X, \mathcal{O})$ は H. Grauert の意味での complex space で reduced であるとする．

<u>定理 8</u>．[8]．$(X, \mathcal{O})$ を Stein space とし，E は complete locally m-convex algebra，$\mathcal{S}(E)$ は locally equicontinuous であるとする，

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{O}\varepsilon E)) = X \times \mathcal{S}(E).$$

証明．open set $U \subset X$ に対して，

$\Gamma(U, \mathcal{O})\varepsilon E = \Gamma(U, \mathcal{O})\hat{\otimes}_{\varepsilon} E$ である（cf. [11]）．前命題より $\Gamma(U, \mathcal{O}\varepsilon E) = \Gamma(U, \mathcal{O})\varepsilon E$ であるから，

$\Gamma(X, \mathcal{O}\varepsilon E) = \Gamma(X, \mathcal{O})\hat{\otimes}_{\varepsilon} E$ を得，したがって結論を得る．

次の定理は (semi-simple) Stein algebras の ε-product が又 (semi-simple) Stein algebra であることを言っている．定理のみをあげる [8]。

<u>定理 9</u>．$(X, {}_X\mathcal{O})$ と $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ を complex spaces とする

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(X, {}_X\mathcal{O})\hat{\otimes}_{\varepsilon}\Gamma(Y, {}_Y\mathcal{O}) = \Gamma(X\times Y, {}_X\mathcal{O}\varepsilon{}_Y\mathcal{O}).$$

特に $(X, {}_X\mathcal{O})$ と $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ が Stein spaces とする

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S}(\Gamma(X\times Y, {}_X\mathcal{O}\varepsilon{}_Y\mathcal{O})) = X\times Y.$$

注意．各節において"＝"は homeomorphism あるいは topological isomorphism のときにも用いてある．

文献

[1] Bishop E., Holomorphic completions, analytic continuation and the interpolation on semi-norms, Ann. Math. 78 (1963) 468–500

[2] Bungart L. Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 317–344.

[3] Forster O., Primärzerlegung in Steinschen Algebren, Math. Ann. 154 (1964).

[4] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Am. Math. Soc. 1955.

[5] Gunning R.C. and Rossi H., Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, 1965.

[6] 一松信，多変数解析函数論，培風館 (1960).

[7] Kahane J.P. and Zelazko W., A characteri-

zation of maximal ideals in commutative Banach algebras, Studia Math. 29(1968) 339-343.

[8] Mallios A., On the spectra of topological algebras, Jour. Functional Anaysis 3(1969) 301 — 309.

[9] ———, On the spectrum of topological tensor product of locally convex algebras, Math. Ann. 154 (1964) 171—180.

[10] Michael E. A., Locally multiplicativelly-convex topological algebras, Mem. Am. Math. Soc. Nr 11 (1952).

[11] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier 7 (1957) 1—141.

[12] Tomiyama J., Tensor product of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. Jour. 12 (1960) 147—154.

[13] Wermer J. Banach Algebras and Analytic Functions, Advan. Math. 1 (1961) 51—102