数理解析研究所講究録
第82巻 1970年 63-77

擬似ブール計画法とその応用について

名古屋大学 工学部 稲垣 康善

§1 はじめに

システム設計において，変数のとる値が 0, 1 に限られているような関数の最大，最小化問題は，一つの重要な問題である。

最近，整数計画法の問題として，この種の関数の最適化アルゴリズムに関する多くの研究がなされている。[(1)~(8)] その中の一つ，P.L. Hammer (Ivănescu), I. Rosenberg, S. Rudeanu は，Dynamic Programming における Bellman の原理を2値変数の問題に適用することによって，変域が $\{0, 1\}$ に制限された実係数多項式の最適化の手法として，擬似ブール計画法 (Pseudo Boolean Programming) を開発した。[(1),(2)] この手法は，他の整数計画法の手法と比べて，目的関数，制約条件式が線形に限定されず，非線形な形でも，又，論理関数あるいはその代数和の形でもよく，適用できる問題の範囲が非常に広く，又，0, 1 変数の性質を Boole 代数の手法を用いて積極的に利用している。このような点から，擬似ブール計画法は，大規模な問題に対する数値計算を効率よく行うための工夫が残されてはいるが，興味深い手法である。

そこで，著者らは，Hammer, Rosenberg, Rudeanu のアルゴリズムを一般化して，条件式のある擬似ブール計画法のアルゴリズムを導き，[(6)] さらに，

Branch and Bound 法の考え方を用いて，その計算機向きのアルゴリズムを開発した。[7]

ここでは，これらの結果の一部を述べると共に，Hammer らの考え方を紹介し，さらに，その応用の可能性について述べる。

§2 諸定義

いくつかの定義を述べ，ここでの問題を定式化する。まず，$L_2=\{0,1\}$，$L_2^1=L_2$，$L_2^{n+1}=L_2\times L_2^n$，$R$：実数体，とする。又，簡単のために，次のベクトル記号を約束する。

$$(x_1,\cdots,x_n)\equiv \boldsymbol{x},\quad (x_i,\cdots,x_n)\equiv \boldsymbol{x}_i,$$

$$(u_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv(u_1,\boldsymbol{x}_2),\quad (u_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\equiv(u_i,\boldsymbol{x}_{i+1})$$

（定義1）L_2^n から R の中への写像，すなわち，$y(\boldsymbol{x}):L_2^n\longrightarrow R$ を擬似ブール関数という。

任意の擬似ブール関数を $y(\boldsymbol{x})$ とすれば，

$$y(\boldsymbol{x}) = x_1\,w(\boldsymbol{x}_2)+z(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

ただし，$w(\boldsymbol{x}_2)=y(1,\boldsymbol{x}_2)-y(0,\boldsymbol{x}_2)$，$z(\boldsymbol{x}_2)=y(0,\boldsymbol{x}_2)$．このことから，擬似ブール関数は実係数多項式によって表わされることが知られる。

（定義2）擬似ブール関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，整係数多項式で，かつ，$f(\boldsymbol{x})\geq 0$，$\forall \boldsymbol{x}\in L_2^n$ が成立するとき，準正値整係数擬似ブール関数（psd. i. 擬似ブール関数）という。

（定義3）L_2^n から L_2 の中への写像 $F(\boldsymbol{x}):L_2^n\rightarrow L_2$ をブール関数という。

明らかに，ブール関数は psd. i. 擬似ブール関数である。

ここで，$a, b \in L_2$ として，論理和，論理積，否定を $a \vee b$，$a \cdot b$，$\bar{a}$ で表わし，又，x_i，$e_i \in L_2$ に対して，次式を約束する。

$$x_i^{e_i} = \overline{x_i} \ (e_i = 0), \ = x_i \ (e_i = 1) \tag{2}$$

また，普通の代数の加，減，乗算を $+$，$-$，並置で表わせば，

$$a \cdot b = ab, \quad \bar{a} = 1 - a, \quad a \vee b = a + b - ab. \tag{3}$$

式(3)から知られるように，ブール関数は多項式表示される。

（定義4）点 $\xi \in L_2^n$ は，次の条件を満たすとき，擬似ブール関数 $y(x)$ の最小点であるという。

$$y(\xi) \leqq y(x), \quad \forall x \in L_2^n$$

（定義5）点 $\xi \in L_2^n$ は，$f(\xi)$ を psd. i. 擬似ブール関数として，次の不等式，$y(\xi) \leqq y(x)$，$\forall x \in \{ x \in L_2^n \mid f(x) = 0 \}$ を満すとき，条件 $f(x) = 0$ のもとでの擬似ブール関数の最小点といわれる。

定義2，4から明らかなように，psd. i. 擬似ブール関数 $f(x) = 0$ を満す点が存在すれば，

$$X \equiv \{ x \in L_2^n \mid f(x) = 0 \} = \{ x \in L_2^n \mid f(x) \leqq f(x'), \forall x' \in L_2^n \}$$

すなわち，$f(x) = 0$ を満す点の空でない集合は，$f(x)$ の最小点の集合に等しい。

これまでの定義を用いて，ここでの問題を定式化する。

（問題）psd. i. 擬似ブール関数 $f(x) = 0$ のもとで，擬似ブール関数 $y(x)$ の最小点を求めること。

したがって，$X \neq \phi$（空集合）のときには，上述の事から，問題は次のよう

に定式化される。なお，$X=\phi$ のときには，解は存在しない。

（問題の定式化）　$f(x)$ の最小点の集合 X の中で，$y(x)$ を最小にする点をすべて求めよ。

ここで，$\max y(x)$ を与える点は，$\min(-y(x))$ を与える点に等しく，又，$f_i(x)$ が psd. i. 擬似ブール関数であれば，一般に $f_i(x)=0$ ($i=1,\cdots,m$) は，$f(x)=0$ の形の1つの条件式に帰着されるから，上の問題を解くことは，一般に $f_i(x)=0$ ($i=1,\cdots,n$) の制約条件式のもとでの $y(x)$ の最小点，最大点を求める問題に解を与えることになる。

§3　最小点を求めるアルゴリズム

任意の擬似ブール関数を $y(x)$ とすれば，式(1)より，

$$y(x)=x_1 w(x_2)+z(x_2).$$

いま，$x\in L_2^n$ が $y(x)$ の最小点であれば，定義4から，

$$y(x_1,x_2)\leqq y(\overline{x}_1,x_2) \tag{4}$$

ただし，$\overline{x}_1=1-x_1$。したがって，

$$(2x_1-1)\,w(x_2)\leqq 0 \tag{5}$$

ゆえに，

$$x_1=\begin{cases}1\ ; & w(x_2)<0\\ 0\ ; & w(x_2)>0\\ \text{任意}\ ; & w(x_2)=0\end{cases} \tag{6}$$

この式(6)ならびに§2の問題の定式化を考慮すれば，次のアルゴリズムを得る。

［ 制約条件式のある擬似ブール関数の最小点を求める手順 ］

制約条件を擬似ブール関数 $f(x)=0$，最小にすべき目的関数を擬

似ブール関数 $y(x)$ とする。まず, f_1, y_1 を次のように定める.

$$f(x) \equiv f_1(x) \tag{7.1}$$

$$y(x) \equiv y_1(x) \tag{8.1}$$

さて, 最初に f_1 を最小にする x_1 の範囲を求めるために, 式(1)と同様にして,

$$f_1(x) = x_1 g_1(x_2) + h_1(x_2) \tag{9.1}$$

ただし, $g_1(x_2) = f_1(1, x_2) - f_1(0, x_2)$, $h_1(x_2) = f_1(0, x_2)$ (10.1)

そこで, $u_1 \in L_2$ をパラメータとして, ブール関数 $\Phi_1(x_2) : L_2^{n-1} \longrightarrow L_2$ を,

$$\Phi_1(x_2) = \begin{cases} 1; & g_1(x_2) < 0 \\ 0; & g_1(x_2) > 0 \\ u_1; & g_1(x_2) = 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

のように定義する。u_1 を任意パラメータとすれば, 式(6)を導出した議論から知られるように, Φ_1 は f_1 を最小にする x_1 を与える. ここで, 便利のために,

$A_1 = \{ \alpha_2 \in L_2^{n-1} \mid g_1(\alpha_2) < 0 \}$, $B_1 = \{ \beta_2 \in L_2^{n-1} \mid g_1(\beta_2) = 0 \}$ として,

$$\Phi_{11}(x_2) = \bigvee_{\alpha_2 \in A_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad \Phi_{12}(x_2) = \bigvee_{\beta_2 \in B_1} x_2^{\beta_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{\beta_n} \tag{12.1}$$

を定義すれば,

$$\Phi_1 = \Phi_{11}(x_2) \vee u_1 \cdot \Phi_{12}(x_2) \tag{13.1}$$

A_1, B_1 の定義より, $A_1 \cap B_1 = \phi$ であり, したがって, $\Phi_{11}(x_2) \cdot \Phi_{12}(x_2) = 0$ であるから, $\Phi_1, \Phi_{11}, \Phi_{12}$ の多項式表示をそれぞれ $\varphi_1, \varphi_{11}, \varphi_{12}$ とすれば,

$$\Phi_1(x_2) = \varphi_1(x_2) = \varphi_{11}(x_2) + u_1 \varphi_{12}(x_2) \tag{14.1}$$

つぎに, $y_1(x)$ が最小になるように u_1 を決める. そのために, $y_1(x)$ を式(1)と同じように展開する.

$$y_1(x) = x_1 w_1(x_2) + z_1(x_2) \tag{15.1}$$

ただし，　$w_1(x_2)=y_1(1,x_2)-y_1(0,x_2)$，　$z_1(x_2)=y_1(0,x_2)$　　(16.1)

式(14.1)を式(15.1)の x_1 へ代入すれば，

$$y_1(x)=\{\varphi_{11}(x_2)+u_1\varphi_{12}(x_2)\}w_1(x_2)+z_1(x_2)=u_1\varphi_{12}w_1+(\varphi_{11}w_1+z_1) \quad (17.1)$$

そこで，$v_1\in L_2$ を任意パラメータとして，ブール関数 $\Psi_1:L_2^{n-1}\to L_2$ を，

$$\Psi_1(x_2)=\begin{cases}1 & ;\ \varphi_{12}(x_2)w_1(x_2)<0\\ 0 & ;\ \varphi_{12}(x_2)w_1(x_2)>0\\ v_1 & ;\ \varphi_{12}(x_2)w_1(x_2)=0\end{cases} \quad (18.1)$$

のように定義する。簡単のために，$A_1'=\{\alpha_2'\in L_2^{n-1}\mid \varphi_{12}(\alpha_2')w_1(\alpha_2')<0\}$，$B_1'=\{\beta_2'\in L_2^{n-1}\mid \varphi_{12}(\beta_2')w_1(\beta_2')=0\}$ として，

$$\Psi_{11}(x_2)=\bigvee_{\alpha_2'\in A_1'}x_2^{\alpha_2'}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n'},\qquad \Psi_{12}(x_2)=\bigvee_{\beta_2'\in B_1'}x_2^{\beta_2'}\cdot\dots\cdot x_n^{\beta_n'} \quad (19.1)$$

とすれば，　$\Psi_1(x_2)=\Psi_{11}(x_2)\vee v_1\Psi_{12}(x_2)$　　(20.1)

$A_1'\cap B_1'=\phi$ であるから，$\Psi_{11}\cdot\Psi_{12}=0$．したがって，$\Psi_1, \Psi_{11}, \Psi_{12}$ の多項式表示を $\psi_1, \psi_{11}, \psi_{12}$ とすれば，

$$\Psi_1(x_2)=\psi_1(x_2)=\psi_{11}(x_2)+v_1\psi_{12}(x_2) \quad (21.1)$$

最後に，$x_1=\Phi_1(x_2)$，$u_1=\Psi_1(x_2)$ とおく。すなわち，

$$x_1=(\Phi_{11}\vee\Phi_{12}\cdot\Psi_{11})\vee v_1\cdot(\Phi_{12}\cdot\Psi_{12})=(\varphi_{11}+\varphi_{12}\psi_{11})+v_1(\varphi_{12}\psi_{12})\equiv\phi_1(v_1,x_2). \quad (22.1)$$

この x_1 が，条件 $f=0$ のもとで，y を最小にする．かくして，式(22.1)を式(7.1)，(8.1)へ代入すれば，

$$f_1(x)=f_1(\phi_1(v_1,x_2),x_2)\equiv f_2(x_2) \quad (7.2)$$

$$y_1(x)=y_1(\phi_1(v_1,x_2),x_2)\equiv y_2(x_2) \quad (8.2)$$

そこで，f_2, y_2 について上述と同じ手順を繰り返し，x_2 を求める．以下，同様にして，$x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$ が求められる．即ち，一般に，$2\leqq i\leqq n-1$ に対して，

$$f_{i-1}(\phi_{i-1}(v_{i-1}, x_i), x_i) \equiv f_i(x_i) \qquad (7.i)$$

$$y_{i-1}(\phi_{i-1}(v_{i-1}, x_i), x_i) \equiv y_i(x_i) \qquad (8.i)$$

として，式(7.1)～(22.1) の手順と同様にして，x_i が次の様に求められる．

$$x_i = (\Phi_{i1} \vee \Phi_{i2}\cdot\Psi_{i1}) \vee v_i\cdot(\Phi_{i2}\Psi_{i2}) = (\varphi_{i1} + \varphi_{i2}\psi_{i1}) + v_i(\varphi_{i2}\psi_{i2}) \equiv \phi_i(v_i, x_{i+1}) \quad (22.i)$$

以上の手順を繰り返せば，ついには，

$$f_n(x_n) = x_n g_n + h_n \qquad (9.n)$$

$$y_n(x_n) = x_n w_n + z_n \qquad (15.n)$$

が結果する．ただし，g_n, h_n, w_n, z_n は $x_1, \cdots, x_n$ には無関係な定数である．

そこで，$v_n \in L_2$ を任意パラメータ，$\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \psi_{n1}, \psi_{n2}$ を，

$$\varphi_{n1} = 1\ (g_n < 0),\ 0\ (\text{その他})\ ;\quad \varphi_{n2} = 1\ (g_n = 0),\ 0\ (\text{その他})$$

$$\psi_{n1} = 1\ (\varphi_{n2} w_n < 0),\ 0\ (\text{その他})\ ;\quad \psi_{n2} = 1\ (\varphi_{n2} w_n = 0),\ 0\ (\text{その他})$$

のように定義される定数として，

$$x_n = \varphi_{n1} + \varphi_{n2}\psi_{n1} + v_n\varphi_{n2}\psi_{n2} \equiv \phi_n(v_n) \qquad (22.n)$$

$\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \psi_{n1}, \psi_{n2}$ はすべて定数であるから，x_n は任意パラメータ $v_n \in L_2$ だけの関数であり，したがって，

$$x_n = \chi_n(v_n) = \phi_n(v_n) \qquad (23.n)$$

これを，式(22.n−1)へ代入すれば，

$$x_{n-1} = \phi_{n-1}(v_{n-1}, x_n) = \phi_{n-1}(v_{n-1}, \chi_n(v_n)) \equiv \chi_{n-1}(v_{n-1}, v_n) \qquad (23.n\text{-}1)$$

以下同様にして，$x_n, x_{n-1}, \cdots$ を順次代入していけば，$x_{n-2}, \cdots, x_1$ が v_n, $v_{n-1}, \cdots, v_1$ の関数として求められる．

以上のようにして，得られた $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が，制約条件 $f(x)=0$

のもとでの擬似ブール関数 $y(x)$ の最小点を与える。この証明は，紙面の都合で文献(6)にゆずる．

ブール条件式 $F(x)=0$ のもとでの $y(x)$ の最小点は，$F(x)$ の多項式表示を $f(x)$ とすれば，上述のアルゴリズムによって求められる。

さて，$A_i^{*}=\{\alpha_{i+1}^{*}\in L_2^{n-i}\mid w_i(\alpha_{i+1}^{*})<0\}$，$B_i^{*}=\{\beta_{i+1}^{*}\in L_2^{n-i}\mid w_i(\beta_{i+1}^{*})=0\}$ として，

$$\Theta_{i1}=\bigvee_{\alpha_{i+1}^{*}\in A_i^{*}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}^{*}}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n^{*}},\qquad \Theta_{i2}=\bigvee_{\beta_{i+1}^{*}\in B_i^{*}} x_{i+1}^{\beta_{i+1}^{*}}\cdot\dots\cdot x_n^{\beta_n^{*}} \tag{24}$$

を定義し，それらの多項式表示を θ_{i1}，θ_{i2} とすれば，

$$x_i=(\Phi_{i1}\vee\Phi_{i2}\Theta_{i1})\vee v_i\cdot(\Phi_{i2}\cdot\Theta_{i2}) \tag{25}$$

$$=(\varphi_{i1}+\varphi_{i2}\theta_{i1})+v_i(\varphi_{i2}\theta_{i2}) \tag{26}$$

と表わされる。このことと，v_i が任意パラメータであることに注意すれば，上述のアルゴリズムは，次のように簡単化される.(6)

［簡単化されたアルゴリズム］

$$\left.\begin{aligned} f_i(x_i)&=f_{i-1}((\varphi_{i-1,1}+\varphi_{i-1,2}\theta_{i-1,1}),\ x_i)\\ y_i(x_i)&=y_{i-1}((\varphi_{i-1,1}+\varphi_{i-1,2}\theta_{i-1,1}),\ x_i)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

の2式から，

$$g_i(x_{i+1})=f_i(1,x_{i+1})-f_i(0,x_{i+1}),\quad w_i(x_{i+1})=y_i(1,x_{i+1})-y_i(0,x_{i+1}) \tag{28}$$

を作り，式(12.i)，(24)で定義される $\Phi_{i1},\Phi_{i2},\Theta_{i1},\Theta_{i2}$ を計算し，

$$x_i=(\Phi_{i1}\vee\Phi_{i2}\cdot\Theta_{i1})\vee v_i\cdot(\Phi_{i2}\cdot\Theta_{i2})=\varphi_{i1}+\varphi_{i2}\theta_{i1}+v_i\varphi_{i2}\theta_{i2} \tag{29}$$

を求める。$v_i=0$ とおいて，x_i を式(27)の f_i，y_i へ代入し，f_{i+1}，y_{i+1} を計算して，以下同じ手順を繰り返す．

又，ブール条件式 $F(x)=0$ の場合には，式(12.i)の Φ_{i1}，Φ_{i2} は，

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{i1}(x_{i+1}) &= \overline{F_i(1, x_{i+1})}\,F_i(0, x_{i+1}),\\ \Phi_{i2}(x_{i+1}) &= F_i(1, x_{i+1})\,F_i(0, x_{i+1}) \vee \overline{F_i(1, x_{i+1})}\,\overline{F_i(0, x_{i+1})}\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

のように与えられる。

§4 簡単な例

ブール条件式 $F(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1) = 0$ のもとで，擬似ブール関数 $y(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3x_1$ の最小点を求めてみよう。

$$F \equiv F_1(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1\bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1)$$

$$y \equiv y_1(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3x_1$$

まず最初に，g_1，w_1 を求めれば，

$$g_1(x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 - (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3), \quad w_1(x_2, x_3) = 5 + 3x_2 + x_3$$

ゆえに，$\Phi_{11} = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3$，$\Phi_{12} = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3$，$\Theta_{11} = \Theta_{12} = 0$

よって，$x_1 = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 = x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3$

これを F_1，y_1 へ代入すれば，

$$F_2(x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3, \quad y_2(x_2, x_3) = 5x_2\bar{x}_3 + 5\bar{x}_2x_3 + 3x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3 + 3x_2 - 7x_2 - 2x_2x_3$$

以下同様にすると，$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = 1$，$y_{min} = -6$ が得られる。

§5 Branch and Bound 法にもとずくアルゴリズム

擬似ブール計画法の計算機プログラム向きのアルゴリズムを次に示す。そのために，少しく問題の関数の形を変形する。X を変数とするブール

関数 $Y_i(x)$, $F_i(x)$を用いて，

$$y(x)=\sum_{i=1}^{M}a_i Y_i(x)\ ,\qquad F(x)=\bigvee_{j=1}^{K}F_j(x)$$

を定義する．ただし，$a_i \geqq 0$ とする． このとき，次の問題を考える。

「$F(x)=0$ の条件のもとで $y(x)$を最小にする xを求める。」

以下では，xのはじめの m 個の成分からなるm次元ベクトルを${}^m x \equiv (x_1,\cdots,x_m)$ と表わす。 又，$F(x)=0$ を満す xを可能解と呼び，それらのうちで $y(x)$を最小にする x を最適解と呼び x^{opt}と表わす。

まず，次の関数列 $\{F^{(m)}({}^m x)\}$, $\{y^{(m)}({}^m x)\}$ $(m=1,\cdots,n)$ を定義する。 すなわち，

$$F^{(n)}(x)=F(x),\quad F^{(m)}({}^m x)=F^{(m+1)}({}^m x,0)\cdot F^{(m+1)}({}^m x,1) \tag{31}$$

$$y^{(m)}({}^m x)=\sum_{i=1}^{M}a_i Y_i^{(m)}({}^m x) \tag{32}$$

ただし，$Y_i^{(n)}(x)=Y_i(x)$, $\quad Y_i^{(m)}({}^m x)=Y_i^{(m+1)}({}^m x,0)\cdot Y_i^{(m+1)}({}^m x,1)$ (33)

つぎに，パラメータC に対して，これらの関数列に対応する集合列$\{\Gamma^{(m)}(C)\}$ $(m=1,2,\cdots,n)$ をつぎのように定義する。

$$\Gamma^{(m)}(C)=\{{}^m x \mid F^{(m)}({}^m x)=0,\ y^{(m)}({}^m x)\leqq C\} \tag{34}$$

このとき，集合$\Gamma^{(m+1)}(C)$ の任意の要素 ${}^{m+1}x$ のはじめの m個の成分からなるベクトル ${}^m x$は，集合$\Gamma^{(m)}(C)$の中に属することが知られる。

このことから，$\Gamma^{m}(C)$ に属するベクトル ${}^m x$ に x_{m+1} を付け加えて得られる $(m+1)$ 次元ベクトル $({}^m x,\ x_{m+1})$ のうちで，$F^{(m+1)}({}^m x,\ x_{m+1})=0$, $y^{(m+1)}({}^m x,\ x_{m+1})\leqq C$ の条件を満すものの集合が $\Gamma^{(m+1)}(C)$ である。

したがって，$\Gamma^{(1)}(C)$ は $F^{(1)}(x_1)=0$, $y^{(1)}(x_1)\leqq C$ を満す x_1 の集合で

あり，$\Gamma^{(1)}(C)$ から $\Gamma^{(2)}(C)$，…… という様に，逐次的に集合列が求められる．そこで C を最適解による目的関数式の値 $y(x^{opt})$ よりも大きくとれば，$\Gamma^{(n)}(C)$ がすべての最適解を含むことは，明らかである．したがって，すべての最適解を求めるには，次のアルゴリズムが有効である。

［アルゴリズム I］

（*Step* 1） ある定数 C を定める。(i) $F^{(1)}(x_1)$ が恒等的に 1 ならば，可能解は存在しない。（アルゴリズムは終了） (ii) $F^{(1)}(x_1)=0$ となる x_1 があれば，$\Gamma^{(1)}(C)$ を作る。このとき，もし，$\Gamma^{(1)}(C)=\phi$ ならば，C を $C+\Delta C$ $(\Delta C>0)$ として，空でない $\Gamma^{(1)}(C)$ を求める。*Step* 2 へ。

（*Step* m）$(m=2,\cdots,n-1)$ (i) $\Gamma^{(m-1)}(C)\neq\phi$ のとき，$\Gamma^{(m-1)}(C)$ から $\Gamma^{(m)}(C)$ を求めて *Step* $(m+1)$ へ．(ii) $\Gamma^{(m-1)}(C)=\phi$ のとき，C を $C+\Delta C$ にして，*Step* 1 の (ii) へ。

（*Step* n） (i) $\Gamma^{(n-1)}(C)\neq\phi$ のとき，$\Gamma^{(n)}(C)$ を求める．$\Gamma^{(n)}(C)\neq\phi$ ならば，アルゴリズムは終了。$\Gamma^{(n)}(C)=\phi$ ならば，C を $C+\Delta C$ にして，*Step* 1 の (ii) へ。(ii) $\Gamma^{(n-1)}(C)=\phi$ のとき，C を $C+\Delta C$ にして *Step* 1 の (ii) へ。

このアルゴリズムは，*Step* n の (i) で空でない $\Gamma^{(n)}(C)$ がはじめて求められた時に終了する．このとき，求めるすべての最適解は $\Gamma^{(n)}(C)$ の中に含まれている．また，可能解の存在しない時は，*Step* 1 の (i) で終了する。

このアルゴリズムIは，すべての最適解を与える。しかもCを適当な値に定めれば，計算手数は少くなる。しかし，すべての最適解を求めようとするために，$\Gamma^{(m)}(C)$の中に最適解以外の可能解が含まれる可能性があるなどの欠点がある。これに対して，最適解を1つだけ求めれば良い場合に対しては，Branch and Bound法にもとずく改良されたアルゴリズムII，IIIが与えられている。[7]

§6 擬似ブール計画法の応用

0-1変数関数の最適化問題に帰着される問題は多い。[2,4] たとえば，論理演算システムの設計においては，minimal coverの問題，論理関数の簡単化[9]，回路網設計の問題[10,11]，imcoplete sequential machineの簡単化[12]，最適符号系の設計[2]，又，グラフの理論に関連する分野では，maximal flow, minimal cutの問題[2]，bipartite graphのmatchingの問題[2]，さらに一般に，O.R.の問題では，順序づけの問題[2]，Time table schedulingの問題，The Shortest Route Problem[4]，Traveling salesman problem[4]，直交Latin方角の問題[4]等がある。

これらの他にも，考えれば多くの問題があろうが，重要なことは，いかに効率よく解を得るかということである。この点に関しては数値実験的な試みなど，いくつかの研究があるが今後に残された課題であろう。

又，本文で述べた擬似ブール計画法によって，上述のように多くの問題が定式化されるが，このことは，別々に生じてきた問題の間の数学的な関係を明らかにしてくれるものと思われる。このような観点からの研究も興味ある問題ではなかろうか。

末筆ながら，日頃御指導賜る，本学福村晃夫教授，池谷和夫教授，東北大学本多波雄教授に深謝します．

文　献

(1) P.L. Ivănescu, Ivo Rosenberg and S. Rudeanu : "Aspra determinarii minimelor functiilor pseudo Booleene", Studii i Cercetari Matematice, vol. 14, p. 359 (1963)

(2) P.L. Hammer (Ivănescu) and Sergiu Rudeanu : "Boolean Methods in Operations Research and Related Areas", Springer Verlag, Belrin Heidelberg New York, (1968)

(3) Egon Bales : "An additive algorithm for solving linear programms with zero-one variables", Operations Research, vol. 13, p. 517 (July-Aug., 1965)

(4) G. B. Dantzig : "Linear Programming and Extensions", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1963)

(5) T. Ibaraki, T.K. Liu, C.R. Baugh and S. Muroga : "An Impricit Enumeration Program for Zero-One Integer Programming" Rept. no. 305, Dept. of Computer Science, Univ. of Illinois, (January 6, 1969.)

(6) 稲垣, 福村 : "制約条件式をもつ擬似ブール計画法について", 電子通信学会雑誌, vol. 50, no. 6, p.47, (昭42.06)

(7) 吉田, 稲垣, 福村 : "Branch and Bound 法にもとずく擬似ブール計画法のアルゴリズム", 電子通信学会雑誌 vol. 50, no. 10, p. 231 (昭42,10)

(8) 阿部, 木村, 本多 : "Integer Programming の組み合せ論的解法", 電子通信学会, オートマトンと自動制御研究会資料(昭41・09)

(9) T. Fukumura, Y. Inagaki and K. Komura : "Minimization of Hazard-Free Switching Networks", Information Processing in Japan, vol. 8, (1968), p. 14

(10) 伊藤, 稲垣, 福村 : "NAND 論理を用いた論理回路網の合成", 電子通信学会雑誌掲載予定

(11) S. Muroga et. al. : "Optimum Network Design Using NOR and NOR-AND gate by Integer Programming", Rept. no. 293, Dept. of Computer Science, Univ. of Illinois, (January 10, 1969).

(12) A. Grasselli and F. Luccio : " A mechod for minimization the number of internal states in incompletely specified sequential networks", IEEE Trans. vol. EC-14, p. 350, (June 1965).