数理解析研究所講究録
第83巻 1970年 25-43

素粒子とソリトン

早大 理工　　並木 美喜雄
大場 一郎

この研究会の他の話とちがって，これは素粒子物理にソリトンのような非線形波動が模型として利用できないだろうかという希望の表明である．数学者，流体力学および結晶振動の専門家の興味をよんで，貴重な助言がいただければありがたい．

§1. 場の理論における素粒子像

常識的な素粒子像は従来場の理論を用いて定式化されている．まずそれを簡単に紹介し，従来の考えについての疑問を述べることにしよう．

素粒子はいろいろな物理量をもった単独な自由粒子として運動する．これは適当な波動関数 $\phi(x)$，$\psi(x)$ によって表され，それらは自由場の方程式

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0$$

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0$$

$$\cdots\cdots$$

（mは質量）

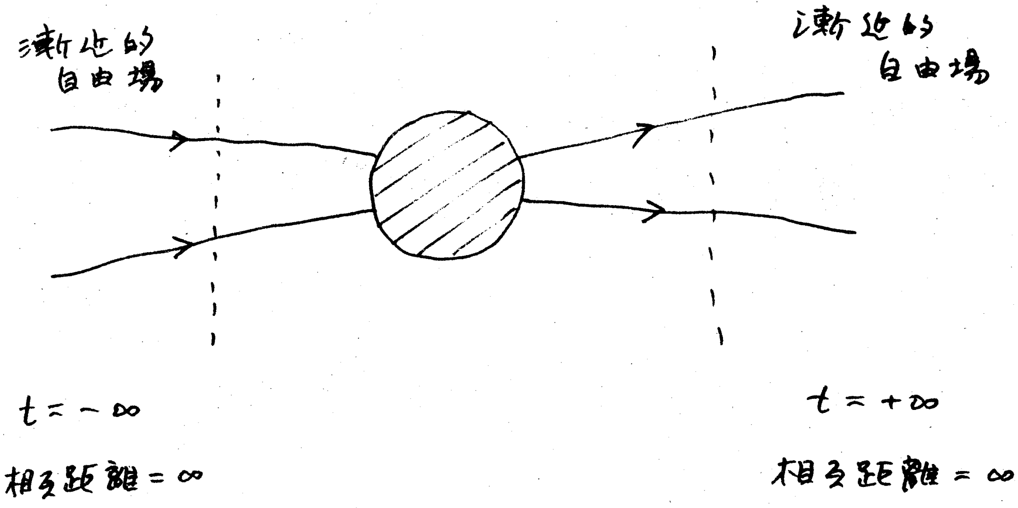
などを満足する。この方程式の意味は

a) エネルギーと運動量の関係　$p^2 + m^2 = E^2$

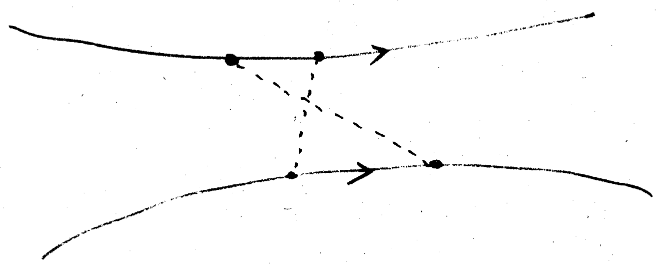
b) エネルギーEと運動量pが、ある時空領域から別の時空領域へ、この方程式に従ってはこばれることである。

~~ことである~~。さらに(c)この方程式の解は、すべての物理状態を表すため、"完全系"をつくらなければならない。改行　普通上記の方程式は"平面波"解をもつが、これはたしかに完全系をつくる。a) b) (c) は素粒子像に対する基本的要請である。

自由場の方程式では、素粒子間の相互作用を記述することはできない。素粒子間相互作用の簡単な例は、固定ポテンシャルをもつ短距離力による散乱現象である。2個の粒子が互いに十分はなれた場所から出発し、近接して力を及ぼし合い、次に互いに遠ざかってゆく。力を及ぼし合う前と後は漸近的に自由粒子であり、上記の自由場の方程式で記述できる。図式的に描けば、次のようになる。



素粒子間相互作用が、このような固定ポテンシャルをもつ短距離力の場合は比較的に簡単であるが、場で媒介されるような場合は話はふくざつになる。この場の量子が散乱相手同士によって交換されるとき（下図）は、話はあまり面倒では



なく固定ポテンシャルの場合と同じように考えてもよい。問題は自己場，すなわち，場の量子を放出した粒子がふたたびそれを吸収する現象をどう処理するかというところにある。図に描けば，下のようになるから，２個の粒子が互いにどのようにはなれても，相互作用はゼロにならない。つまり~~自~~素

粒子は，場を媒介とする相互作用をもっているかぎり，漸近的にも自由場の方程式で記述されるかどうかは自明の問題ではない．

従来の常識的な理論では，この自己場の効果はすべて"くりこみ"——すなわち，波動関数の振幅，電荷，質量の値の変化——だけに影響を与えるものとして，一応矛盾のない"くりこみ理論"をつくっている．そこでは相互作用をしているふくざつな場の方程式を満たす場の量 ϕ, ψ に対して

$$\phi(x),\ \psi(x) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \begin{array}{l} Z_3^{\frac{1}{2}}\,\phi_R(x) \\ Z_2^{\frac{1}{2}}\,\psi_R(x) \end{array}$$

のようになるものとして——これを境界条件として——方程式を摂動論によって解く．ただし Z_2, Z_3 はくりこみ定数であり，ϕ_R や ψ_R は自由場である．このような問題設定に対して，果して本当に解が存在するかどうかを数学的な意味で証明することは大へんむずかしいことである．実際，わずかの簡単なオモチャをのぞいては，誰も成功していない．

相互作用をもつ場は本質的に非線形になる．たとえば，電

子と光子の相互作用をしらべる量子電磁力学（QED）の基礎方程式は

$$\{\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m\}\psi = 0$$

$$\Box A_\mu = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

であるが，A_μ（またはψ）を消去してψ（またはA_μ）だけの方程式をつくれば，たしかに非線形方程式になる．このような非線形波動方程式の独立波動が（くりこまれた）平面波だけであるという保証はないかもしれない．

QEDのような実在素粒子の現象論的場ばかりでなく，非線形波動はHeisenbergの統一場理論でも考えられている．Heisenbergは実在素粒子は宇宙に充満している"原物質"の振動様式であるとし，その"原物質"に対する基礎方程式としてスピノール波の非線形方程式を仮定した．彼の理論は数学的難しさその他の理由で，あまり世に受入れられていないが，相互作用をもつ素粒子の方程式が一般に非線形になるだろうということは共通の常識である．

したがって，自由粒子として運動中の素粒子が平面波のような自由場の解で記述されるというのも希望的観測にすぎないのではないか．自由粒子を表す非線形波動のモデルが何かないか．今迄の場の理論の困難――発散の問題――が平面波

像とかなり密接に結びついていたことを考えれば，本来非線形波動である自由粒子状態を，むしろ特殊な非線形波動として表現する可能性をしらべることも意味があるかもしれない．

ソリトンはその一つの可能性を示しているようにみえる．すなわち，相互作用をしている場 ϕ が

$$\phi \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \phi_{soliton}$$

を境界条件とする素粒子像が可能であるかもしれない．そこでソリトンが素粒子像の模型と考えられるためには，どのような知識が必要となるかを並べてみよう．

§2. 素粒子像のためにほしいソリトンの知識

自由粒子を表すための波動が満足すべき基本的性質は2頁のa), b) c) であった．ソリトン　またはそれに類する非線形波動が，エネルギーや運動量をはこぶということは確からしい．ここではc)，すなわち，完全系をつくるかどうかという問題をとり上げる．場の量子論において完全系というのは，任意の物理的状態が自由粒子波動の重ね合せで表せるということである．

(i) すべての物理的状態が $\{\phi_{soliton}\}$ の（何らかの意味での）重ね合せによっ

と表すことができるか？　ソリトンはかなり線形に近い性質をもち，ある意味で重ね合せができることが知られているが，その重ね合せの数学的内容およびその重ね合せによって表される関数の範囲を知りたい．

(ii) ソリトン個数の数学的表現をどのようにつくるか．たとえば，

$$\Psi_0 = \mathrm{const}$$

$$\Psi_1 = \phi(x, t, c) \qquad \cdots \ \phi:\text{ソリトン解}$$

$$\Psi_2 = \phi_1(x_1, t_1, c_1)\,\phi_2(x_2, t_2, c_2)$$

$$(\text{または}\ \phi_1(x, t, c_1) + \phi_2(x, t, c_2)\ \text{なのか})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

のようなFock空間表示がつくれないか．そのとき

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

が満足する方程式をコンパクトな形に書くことはできないだろうか．

(iii) その方程式を，境界条件

$$\Psi \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \Psi_{soliton}$$

によって解くことができるか．

このような総括的な問題に答えるためには，次のような具体的な知識を参考にする必要があるであろう：

(i) 2個のソリトンの衝突はKdV方程式では2個のままでいることが証明されているが，その場合のphase shiftの性質はどうなっているか．すなわち，

$$t=-\infty \text{ で } \phi(x-c_1t-\theta_1^{(-)})+\phi(x-c_2t-\theta_2^{(-)})$$

が

$$t=+\infty \text{ で } \phi(x-c_1t-\theta_1^{(+)})+\phi(x-c_2t-\theta_2^{(+)})$$

となったとしたときの $(\theta_i^{(+)}-\theta_i^{(-)})$ の性質――とくに $\theta_i^{(-)}$ c_1, c_2 に対する依存性などが知りたい．phase shiftは一般にeffective forceの引力性，斥力性その他の性質をみるのに都合がよい．KdV方程式ばかりでなく，他の場合についても知りたい．

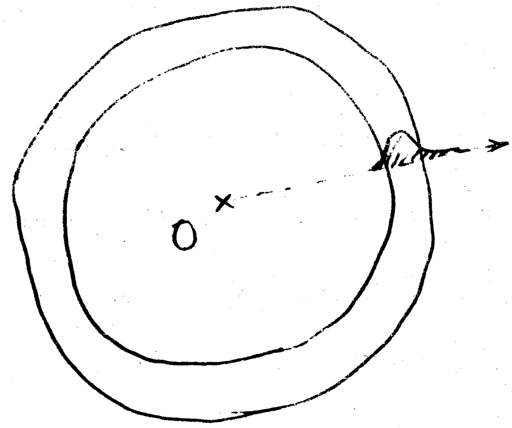
(ii) 個数保存は成立するか．KdV方程式によれば

2個 → 2個であるが，別の　方程式ではどうなるか．また
KdV 方程式の場合でも，3個 → 3個となるか．一般
に n個 → n個 なのか．とくに3個 → 3個
を数値的にしらべることはできないだろうか．

(iii) $F_0(u)=0$ が soliton を解とする方程式のとき，
$F_0(u)=\varepsilon G(u)$ の方程式の性質をしらべたい．ただし，
εは十分小さい数，$G(u)$ は空間的に localize されてい
る u の汎関数または関数であるとする．簡単には $V(x)u(x)$
のようなものでもよい．そしてどのような G をえらんだら
ソリトン生成または消滅ができるかをしらべたいのである．
すなわち，1個のソリトン ＋ G → n 個のソリトン＋G
（nはゼロを含む）となる G の具体例がつくれるとよい．
この調査を KdV 方程式でやれないだろうか．

以上の話を具体的にしらべるには，当分の間1次元 KdV
方程式によらざるをえないだろう．しかし，何時までも1次
元のままでは，あるいは，実用性に乏しいかもしれない．
（もっとも，次節のような仮想的なパラメータ空間の波動と
考える　　場合はその必要はない．）ここでソリトン波動
の3次元化を考えよう．といっても，3次元空間内の粒子状
の局在波としてソリトンをつくるのはそれほど簡単ではない

らしい。(もちろん，その問題を解いて下さるのなら，それもたいへんありがたい。）しかし，必ずしも粒子状局在波は不要かもしれない。たとえば，$\xi = \alpha r - ct$　$(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ に対して"ソリトン"を考えてもよいだろう。この場合，"ソリトン"は，原点を中心とした球殻状の波束になっている。このような3次元ソリトンの方程式は，1次元の方程式で，ただxをrでおき換えただけである。もちろん，KdV方程式のままでは簡単に相対論の要求を満足させられないだろうが，解は相対論的であるから，何とかデッチ上げられないものでもないと思っている。次節の後半部でわかるように，この形の"ソリトン"のフーリエ変換と最近話題になっているVenegiano Model との間に意味ありげな関係が存在する。



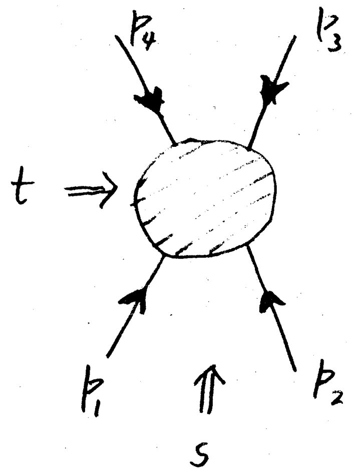
さて今迄は専らc数理論として考えてきた。一般に素粒子像をつくるには"量子化"しなければならない。この問題は

個数を表す方法の定式化にも関連しているので，この節のはじめに与えたFock表示をつくる問題とも関係がある．

§3. 最近の素粒子論から

最近いろいろな要求を満足する簡単なモデル散乱振幅がVenezianoによって与えられている．これは一つの近似になっているのだろうが，その背後にかくされている未知の"dynamics"を探がすことが現在の重要な課題である．まずVeneziano振幅を簡単に紹介し，それが1次元波動に結びついていることを示し，さらにソリトンとの関係をさぐる．

簡単のためスピン0のスカラー中性粒子の散乱を考えよう．(図参照)



ローレンツ不変性などにより，この散乱振幅は2個の不変な独立変数sとtの関数として書ける：

$$s = -(p_1 + p_2)^2$$

$$t = -(p_1 + p_4)^2$$

ここで$(\quad)^2$はミンコフスキー空間でのベクトルの長さの2乗を示す．ただし時間またはエネルギー成分を一にしてある．(例 $p^2 = \mathbf{p}^2 - p_0^2$) 重心系

$\underset{s}{\Uparrow}$の向きに時間が経過したとして

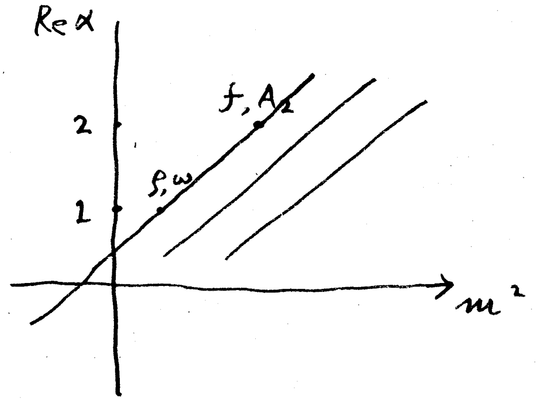
をとると $s=4(p^2+m^2)$, $t=-2|p|^2(1-\cos\theta)$ となり, sは全エネルギーの2倍を, tは運動量受け渡し量を与える. これをs-channel という. $t \Rightarrow$ の向きに時間が経過する散乱を t-channel という. t-channel ではtがエネルギー変数になり, sが運動量受け渡し量を表す. 散乱振幅はsとtの関数として $F(s,t)$ とかくことにしよう. この F は一つの関数で s-channel 振幅と t-channel 振幅を同時に表さなければならないので, いろいろな要求がつけられる. この場合でいえば, sとtについて対称であることがその一つである. その他に s-channel に現われる共鳴散乱の総和として F をかけたとすれば, それは同時に t-channel 共鳴散乱の総和に等しくなければならないこと (duality) も要求される. (この意味についてくわしく説明しているヒマはない.) そして t-fixed で $s \to \infty$ としたとき Fが Regge pole 型関数を持つべきである. これらの諸要求が

$$F(s,t)=B(-\alpha_s,-\alpha_t)=\frac{\Gamma(-\alpha_s)\Gamma(-\alpha_t)}{\Gamma(-\alpha_t-\alpha_s)}$$

という簡単な関数ですべて満足されることがわかる. Bはベータ関数, Γはガンマ関数であり, そして α_s, α_t は

$$\alpha_s = \alpha_0 + \alpha' s \quad , \quad \alpha_t = \alpha_0 + \alpha' t$$

である．sまたはtの(1次)関数としてのαはRegge trajectoryとして知られている．タテ軸にRe α（これは角運動量という意味が与えられている）をヨコ軸にsまたはtをとると，図のように直線が描ける．s (or t) > 0 は丁度 s channel (or t-channel) の共鳴粒子の質量の2乗を表すから，この図は実在粒子および共鳴状態のスピン・質量関係を与える．これを実験によってplotすると互いに平行な直線群ができるようである．つまり上の α_s, α_t の式はそれに対応して α_0 と α' をえらぶわけである．α_0 は粒子のファミリーによっていろいろな値をとるが，α' はほとんど共通で大体 $1\ (\mathrm{GeV}/c)^{-2}$ ぐらいの値をとる．



さてB関数を

$$F(s,t) = \int_0^1 dx\, x^{-\alpha_s - 1}(1-x)^{-\alpha_t - 1} = \int_0^1 dy\, y^{-\alpha_t - 1}(1-y)^{-\alpha_s - 1}$$

とかいてみよう．sとtについて対称なことは明らかである．一方簡単な計算で

$$F(s,t) = \sum_n \frac{1}{n-\alpha_s} \frac{(-1)^n \Gamma(-\alpha_t)}{\Gamma(-\alpha_t - n + 1)\, n!}$$

$$= \sum_n \frac{1}{n-\alpha_t} \frac{(-1)^n \Gamma(-\alpha_s)}{\Gamma(-\alpha_s - n + 1)\, n!}$$

となるが，これはたしかに duality を示している．さらに t-fixed で $s \to \infty$ とすると

$$F(s,t) \longrightarrow \gamma(t)\, e^{i\pi\alpha_t} \exp[\alpha_0 \ln s + (\alpha' \ln s)\, t]$$

がえられる．$\left(\gamma(t) = \Gamma(-\alpha_t)\left(\frac{\alpha'}{e}\right)^{\alpha_t}\right)$ これはたしかに Regge pole 型関数である．一方 $\theta \simeq 0$ では $t \simeq -p^2\theta^2$ であるから，散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto e^{-(\alpha' \ln s)\, p^2 \theta^2}$$

であり，実験整理の半現象論として役に立つことが知られている．

さて簡単のため $\alpha' = \frac{1}{2}$ であるとして $F(s,t)$ の変形をはじめよう．外線がスカラー粒子であるから $\alpha(m^2) = 0$ に注意すれば

$$\alpha_t + 1 = c - p_2 \cdot p_3 ,$$

$$c = 1 - \alpha_0$$

となる。従って 被積分函数の中の項 $\underbrace{(1-x)^{p_2\cdot p_3 - c}}_{(1-x)^{-\alpha_t - 1} =}$ は

$$(1-x)^{p_2\cdot p_3 - c} = \exp\left[+(p_2\cdot p_3 - c)\ln(1-x)\right]$$

$$= \exp\left[-(p_2\cdot p_3 - c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]$$

とかきあらわせる。ここで5次元 Boselike の生成演算子と消滅演算子を導入する：

$$[a_\alpha^{(r)}, a_\beta^{+(s)}] = \delta_{rs}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

$$[a_\alpha^{(r)}, a_\beta^{(s)}] = [a_\alpha^{+(r)}, a_\beta^{+(s)}] = 0$$

$$\alpha = 1, 2, \cdots, 5; \quad r = 1, 2, \cdots\cdots$$

すると指数部分 は 真空状態 $|0\rangle$ の期待値でかけることが示せる。

$$\exp\left(-(p_2\cdot p_3 - c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right) = \langle 0|\exp\left[i\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}\,a^{(n)}\cdot k_3\right]x^H \times$$

$$\exp\left[i\sum\sqrt{\frac{1}{n}}\,a^{+(n)}\cdot k_2\right]|0\rangle$$

但し

$$a_\alpha^{(r)}|0\rangle = 0$$

$$k_{3\alpha} = (\vec{p}_3, ip_{30}, i\sqrt{c}), \quad k_{2\alpha} = (\vec{p}_2, ip_{20}, i\sqrt{c})$$

$$H = \sum_{n,\alpha} n\, a_\alpha^{+(n)} a_\alpha^{(n)}$$

である．4体散乱振幅ではこれで充分であるが，物理的意味付けと多体散乱に拡張するには vertex の部分

$$V(p) \equiv \qquad \exp\left[i\sum\frac{k}{\sqrt{n}}\cdot a^{+(n)}\right]\exp\left[i\sum\frac{k}{\sqrt{n}}\cdot a^{(n)}\right]$$

$$k_\alpha = (\vec{p},\ ip_0,\ i\sqrt{c})$$

を導入した方が都合がよい。以上の結果を被積分函数に代入して，zで積分すると

$$F(s,t) = \langle 0 | V(p_3) \frac{1}{H - \alpha_s} V(p_2) | 0 \rangle$$

となる。この意味をはっきりさせるために ボーズ場$q_\alpha(\xi)$とその共役$\pi_\alpha(\xi)$をパラメータ空間$[0, 2\pi]$内で定義する：

$$\phi_\alpha(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_\alpha^{(n)} + a_\alpha^{+(n)}) \cos n\xi$$

$$\pi_\alpha(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} i\sqrt{n} (a_\alpha^{(n)} - a_\alpha^{+(n)}) \cos n\xi \ .$$

上で求めた振幅の$\underbrace{\text{(s-channel}}_{\text{中に含まれている)}}$の共鳴状態のエネルギーをきめる演算子は

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} : \partial_\xi \phi(\xi) \cdot \partial_\xi \phi(\xi) + \pi(\xi) \cdot \pi(\xi) : d\xi,$$

vertex部分は

$$V(p) = :\exp[\, i k \cdot \phi(0) \,]:$$

とかける。ここで $:\cdots:$ は ノルマル積を表わす。これはスカラー粒子の内部エネルギーが，量子化された$\underbrace{\text{弦}}_{\text{の振動}}$あるいは物質の空洞共振のエネルギーに似ていることを示している。vertex の部分$V(p)$によって作られた状態を

$$V(p)\,|0\rangle = |V(p)\rangle$$

で定義すれば，これはパラメータ空間ξでの　コヒーレント波状態，あるいは古典波状態となっている。とくに高エネルギでは $p \to \infty$ であるから，この古典波の source 又は振幅は ∞ になる。そのため，振動のモード数と位相のゆらぎはそれぞれ　$\delta n/n \ll 1$，　$\delta x/x \ll 1$　となり

正に古典波の特徴を示している。

この波動の性質を調べるにはξ空間での表示に変換した方が都合がよい。中間に $|\xi_1\rangle d\xi_1\langle\xi_1| + |\xi_1,\xi_2\rangle d\xi_1 d\xi_2 \langle\xi_1,\xi_2| + \cdots$ をはさめば，

$$F(s,t) = \langle V(p_3)|\frac{1}{H-\alpha}|V(p_2)\rangle$$

$$= \int \langle V(p_3)|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\frac{1}{H-\alpha}|\xi_1'\rangle\langle\xi_1'|V(p_2)\rangle d\xi_1 d\xi_1'$$

$$+ \int \langle V(p_3)|\xi_1,\xi_2\rangle\langle\xi_1,\xi_2|\frac{1}{H-\alpha}|\xi_1',\xi_2'\rangle\langle\xi_1',\xi_2'|V(p_2)\rangle d\xi_1 d\xi_2 d\xi_1' d\xi_2'$$

$$+ \cdots$$

$$= \int v_{p_3}^*(\xi_1)\, G_\alpha^{(1)}(\xi_1,\xi_1')\, v_{p_2}(\xi_1')\, d\xi_1 d\xi_1'$$

$$+ \int v_{p_3}^*(\xi_1,\xi_2)\, G_\alpha^{(2)}(\xi_1,\xi_2;\xi_1',\xi_2')\, v_{p_2}(\xi_1',\xi_2')\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_1' d\xi_2'$$

$$+ \cdots$$

となる。ここで G_α は　古典波のグリーン函数でその従う方程式は

$$(H-\alpha)\, G_\alpha^{(1)}(\xi,\xi') = \delta(\xi-\xi')$$

と書けよう。このようにした上で、パラメータ空間での調和振動子の波動場の時間依存性の問題や非線形波動との関係を議論していきたい。

一方 振幅 $F(s,t)$ をフーリエ変換としてもつような一次元波動はどんなものかを考えたい。そのためのモデルとして generalized KdV 方程式を考える。方程式

$$u_\tau + u^{\frac{2}{p}} u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

はソリトンの解

$$U(\xi) = A\left[\mathrm{sech}\,\frac{\xi}{\Delta}\right]^p, \quad \xi = x - c\tau$$

$$\begin{cases} c = \dfrac{p^2}{(p+1)(p+2)} A^{\frac{2}{p}} \\ \Delta = \dfrac{p\delta}{\sqrt{c}} \end{cases}$$

を持つ。簡単のために $\Delta = 1$ とおくとこのフーリエ変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^p \xi \, e^{-iQ\xi} d\xi = 2^{p-1} B\left(\tfrac{1}{2}(p+iQ), \tfrac{1}{2}(p-iQ)\right)$$

となる。この定義域は Q : real, $\mathrm{Re}\,P > 0$ であるが、

$$\mathrm{Re}\,P > |\mathrm{Im}\,Q|$$

の条件下で Q を複素平面に拡張できる。ここで

$$\begin{cases} P = J_s + J_t - \alpha_s - \alpha_t \\ Q = -i\,(J_s - J_t - \alpha_s + \alpha_t) \end{cases}$$

とおけば，フーリエ変換は

$$2^{P-1} B(J_s - \alpha_s,\ J_t - \alpha_t)$$

となり，s-channel，t-channel で最小スピン J_s, J_t をもつ Veneziano 振幅に結びつくことがわかった。実際π中間子π中間子散乱で定義できる条件を求めてみるとこれは重心系における運動量 p_{cm} が 400 MeV/c 以下ならば満されるので，得られた B 函数を高エネルギー領域まで解析接続するのに充分である。ここでは一次元波動を考えたが，これは§2で述べたように球殻状の波束とみなせば，三次元波動とも考えられよう。

最後に，著者らにソリトンの存在を知らせて下さった谷内俊彌氏と，有益な数学的議論をして下さっている飯野理一氏に感謝する。