数理解析研究所講究録
第 83 巻 1970 年 83-93

非線型格子のつらなり波とソリトンとの関係

東教大 理　戸田盛和

§1 運動方程式

非線型のバネでつながれた1次元の鎖を考える。バネの自然長からの変化をrとし，バネの位置エネルギーを

$$\phi(r) = a\left(e^{-br} + r\right) \tag{1}$$

とする。このとき運動方程式は

$$m\ddot{r}_n = a\left(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}\right) \tag{2}$$

となる。ここで

$$br_n \to r_n , \qquad \sqrt{\frac{ab}{m}}\, t \to t \tag{3}$$

と書き変えると，運動方程式は

$$\ddot{r}_n = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}} \tag{4}$$

となる。今後，この形で考えよう。

$$e^{-r_n}-1=y_n \qquad \text{または} \qquad r_n=-\log(1+y_n) \tag{5}$$

とおくと，運動方程式は

$$-\ddot{r}_n=\frac{d^2}{dt^2}\log(1+y_n)=y_{n-1}+y_{n+1}-2y_n \tag{6}$$

となる。ここで

$$\int^t y_n\,dt=s_n \quad , \quad r_n=-\log(1+\dot{s}_n) \tag{7}$$

とおけば，運動方程式を一回まで積分して

$$-\dot{r}_n=\frac{d}{dt}\log(1+\dot{s}_n)=s_{n-1}+s_{n+1}-2s_n \tag{8}$$

となる。ただし右辺で積分定数 $\alpha_n=0$ とおいた。これは s_n を適当に定義すれば可能である。さらに

$$\int^t s_n\,dt=S_n \quad , \quad r_n=-\log(1+\ddot{S}_n), \tag{9}$$

$$\therefore \quad e^{-r_n}-1=\ddot{S}_n \tag{9'}$$

とおけば

$$-r_n=\log(1+\ddot{S}_n)=S_{n-1}+S_{n+1}-2S_n \tag{10}$$

となる。ここでも積分定数を適当に選んで

$$r_n=2S_n-S_{n-1}-S_{n+1} \tag{11}$$

になるようにした。(10) の右の等式を運動方程式と考えることができる。ただし，このときは (11) によってバネの長さが与えられる。

§ 2. つらなり波

楕円テータ関数 $\vartheta_0(x)$ は周期 1 の関数である。これは次の等式を満足する。

$$\frac{\vartheta_0(x+y)\vartheta_0(x-y)}{[\vartheta_0(x)]^2} = C\left\{1+\mu\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_0(x)\right\} \tag{1}$$

ただし，ここに

$$C = C(y) = \left[\frac{\vartheta_0(y)}{\vartheta_0(0)}\right]^2\left\{1-\left(1-\frac{E}{K}\right)sn^2(2Ky)\right\} \tag{2}$$

$$\mu = \mu(y) = \frac{sn^2(2Ky)}{(2K)^2\left\{1-\left(1-\frac{E}{K}\right)sn^2(2Ky)\right\}} \tag{3}$$

K，E はそれぞれ第1種および第2種の完全楕円積分，sn は Jacobi の楕円関数である。

(1) と運動方程式 (1－10) とを比べると，次のような特解があることがわかる。

$$S_n = \log\left[\vartheta_0\left(\nu t \mp \frac{n}{\lambda}\right)/C^{n^2/2}\right] \tag{4}$$

ただし，ここに ν と λ とは $\nu^2=\mu$ あるいは

$$(2K\nu)^2 = \left\{ \frac{1}{sn^2 \frac{2K}{\lambda}} - 1 + \frac{E}{K} \right\}^{-1} \tag{5}$$

によって関係づけられる。これがこの波の分散関係である。

また、この結果によってバネは伸びていることがわかる。例えばN個の質点を含む鎖が輪を形作っている（周期条件）とすると $r_1 = r_{N+1}$ であり、鎖の長さは(1-11)を援用し

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_N = N \log C\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6}$$

で与えられる。したがって

$$\bar{r} = \log C \tag{7}$$

はバネの平均の伸びを与える。

ϑ関数の性質により

$$\dot{S}_n = s_n = \nu \frac{\vartheta_0'(\nu t \mp \frac{n}{\lambda})}{\vartheta_0(\nu t \mp \frac{n}{\lambda})} = 2K\nu\, Z\left(2\left(\nu t \mp \frac{n}{\lambda}\right)K\right) \tag{8}$$

$$= 2K\nu \int_0^{2(\nu t - \frac{n}{\lambda})K} \left(dn^2 u \mp \frac{E}{K}\right) du \tag{9}$$

したがって(1-7)により、あるいは(1-9')により

$$e^{-r_n} - 1 = \dot{s}_n = (2K\nu)^2 \left[dn^2\left\{2\left(\nu t \mp \frac{n}{\lambda}\right)K\right\} - \frac{E}{K} \right] \tag{10}$$

dnは周期$2K$の関数であり、$dn^2 u$の平均はE/Kである。sn, dnなどのJacobiの楕円関数の母数をkと書くと $0 \le k \le 1$ であり、$dn^2 u = 1 - k^2 sn^2 u$ の関係があ

る。$k \ll 1$ ならば波は正弦波に近いが，$k \simeq 1$ になると，波はとがってくる。(10)はこのようなつらなり波を与え，その波長はλである。

§3．つらなり波の分解

(2-10)あるいは間接的に(2-4)で与えられるつらなり波を考える。ϑ_0関数は

$$\vartheta_0(x)=\vartheta_0(x,q)=\phi(q)\prod_{r=1}^{\infty}(1-2q^{2r-1}\cos 2\pi x+q^{4r-2}) \qquad (1)$$

ただし $\phi(q)=\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r})$ である。すぐわかるように

$$(1-2q_1\cos 2\pi x+q_1^2)(1-2q_1\cos 2\pi(x\pm\tfrac{1}{2})+q_1^2)=1-2q_1^2\cos 4\pi x+q_1^4$$

であるから，$\varphi(q)$ を q だけの関数として

$$\vartheta_0(2x,q^2)=\varphi(q)\cdot\vartheta_0(x,q)\,\vartheta_0(x\pm\tfrac{1}{2},q) \qquad (2)$$

したがって（右方へ伝わる波を記す。左方へ進む波も同様）

$$\begin{aligned} S_n &= \log\vartheta_0\left(\nu t-\frac{n}{\lambda},q\right)+\text{const} \\ &= \log\vartheta_0\left(\frac{\nu}{2}t-\frac{n}{2\lambda},\sqrt{q}\right)+\log\vartheta_0\left(\frac{\nu}{2}t-\frac{n+\lambda}{2\lambda},\sqrt{q}\right) \\ &\qquad +\text{const} \end{aligned} \qquad (3)$$

と書ける。したがって波長λのつらなり波は，波長2λのつらなり波をλだけずらして重ね合わして作ることがで

きる。いいかえれば、つらなり波は、波長が2倍の二つのつらなり波に分解できる。これを $e^{-r_n}-1$ について書くと

$$e^{-r_n}-1=(2K(k)\nu)^2\left[dn^2\left\{2\left(\nu t-\frac{n}{\lambda}\right)K(k),k\right\}-\frac{E(k)}{K(k)}\right]$$

$$=(K(\kappa)\nu)^2\left[dn^2\left\{\left(\nu t-\frac{n}{\lambda}\right)K(\kappa),\kappa\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right.$$

$$\left.+\,dn^2\left\{\left(\nu t-\frac{n}{\lambda}-1\right)K(\kappa),\kappa\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right] \qquad (4)$$

ここにパラメーター q と母数 k と関係は一般に

$$q=e^{-\pi K(k')/K(k)} \qquad (k'=\sqrt{1-k^2}) \qquad (5)$$

であるから、上式の母数 k と κ の関係は

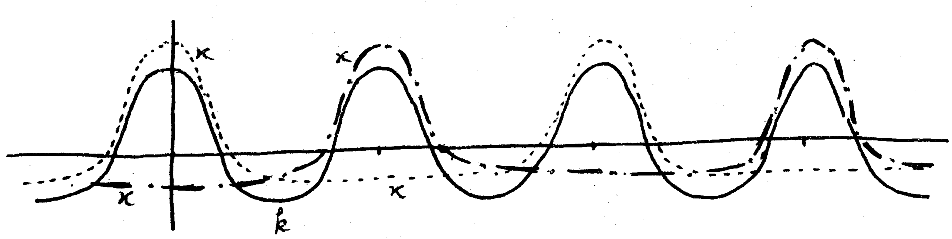
$$\sqrt{q}=e^{-\pi K(\kappa')/K(\kappa)} \qquad (\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}) \qquad (6)$$

あるいは

$$\frac{K(k')}{2K(k)}=\frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \qquad (7)$$

で与えられる。

この場合の非線型の重ね合わせを下に図示する。



これは波形が分解、あるいは逆に合成されることを意味する。しかし、分散関係（νとλとの関係）は全体としての波形（波長λ、母数k）の式（2-5）によってきまるもので、分解された成分波（波長2λ、母数κ）による分散関係によってきまるものではない。ここに非線型の波の分解・合成の特長の一つがみられる。

波長2λの成分波は、さらにそれぞれ2個の波長4λの波に分解できる。しかし、さらに一般に、3個，4個，… など任意の整数個のつらなり波に分解できる。これは次のような(3)式の拡張によって示される。

$$\vartheta_0(lx, q^l) = \frac{\phi(q^l)}{\{\phi(q)\}^l}\prod_{s=0}^{l-1}\vartheta_0\left(x+\frac{s}{l}, q\right) \qquad (8)$$

この式を用いると（1-9'）により，（2-10）は

$$e^{-r_n}-1 = \left(2K(\kappa)\frac{\nu}{l}\right)^2\sum_{s=0}^{l-1}\left[dn^2\left\{2\left(\frac{\nu}{l}t-\frac{n}{l\lambda}+\frac{s}{l}\right)K(\kappa)\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right] \qquad (9)$$

ただし κ は

$$\frac{K(k')}{l\,K(k)} = \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \qquad \left(\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}\right) \qquad (10)$$

でkと関係づけられ，νはλと（2-5）の分散関係で結ばれる。この分解は波長λのつらなり波を，波長$l\lambda$の波l個がλだけずらしたものに分解することである。また，この逆の合成をも意味している。

§4. 周期条件（輪）のソリトン，つらなり波

いままでは，無限鎖（$-\infty<n<\infty$）のつらなり波のように扱ってきたが，この周期的な波は波長の整数倍の長さの輪（周期条件）の中のものと考えることができる。そして前節の分解・合成を周期条件のものとすることができる。分解は前節と同じである。

N個の質点 $n=1,2,\ldots,N$ からなる輪を考え，質点 $n=0$ は $n=N$ と同じであるとする。$r_{N+1}=r_1$.

この輪の中にただ一つの山をもつ(2-10)の形の解を周期条件下のソリトンといってもよいであろう。これは，

$$e^{-r_n}-1=(2K(\kappa)\nu_s)^2\left[dn^2\left\{2\left(\nu_s t-\frac{n}{N}\right)K(\kappa)\right\}-\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right]$$

（母数$=\kappa$）

の形で与えられる。κは母数，ν_s はソリトンに付随する振動数で

$$(2K(\kappa)\nu_s)^2=\left\{\frac{1}{sn^2\frac{2K(\kappa)}{N}}-1+\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)}\right\}^{-1}$$

（母数$=\kappa$）

で与えられる。

このようなソリトンを2個，たがいに$N/2$だけずらして同じ向きに進むようにおくと，(3-4)の規則により合成されて $\lambda=N/2$ のつらなり波が輪の中にできる。これは式(3-4)で $\lambda=N/2$, $\nu=2\nu_s$ とおいて得られる。

ソリトン
（円形波）

合成 → $\lambda = N/2$
（円形波）
つらなり波

これは P.6 の図を円筒形にまるめたものである。

一般化（3-8～10）によれば、周期条件のもとにおけるつらなり波（normal mode）は、その中の波の数だけのソリトンに分解できるわけである。また、波の数が l の倍数ならば、l 個の　　　つらなり波に分解できるわけである。

§5. 無限空間のソリトンによる分解

（3-8～10）において $l \to \infty$ にする場合、あるいは周期的な輪において $N \to \infty$ にする場合、つらなり波はすべてソリトンの集まりで表わされることになる。はじめから無限個に分解するには、次の公式が便利である。

$$\vartheta_0(x) = \vartheta_0(0)\, e^{-\frac{\pi K x^2}{K'}} \prod_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\cosh\left\{\frac{\pi K}{K'}(x-y)\right\}}{\cosh\left(\frac{\pi K}{K'}y\right)} \qquad (1)$$

波長 λ のつらなり波において　$x = \nu t - n/\lambda$　とおき、

$S_n = \log \vartheta_0(x) + \mathrm{const}$　から　$e^{-r_n} - 1 = \dot{s}_n = \ddot{S}_n$　を作れば

$$e^{-r_n} - 1 = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \beta^2 \operatorname{sech}^2(\beta t - \alpha n - \alpha\lambda y) - 2\beta\nu \qquad (2)$$

ただし

$$\alpha = \frac{\pi K}{K'\lambda}, \qquad \beta = \alpha\lambda\nu \tag{3}$$

を得る。波の速度，分散関係はもちろん 2-5 で与えられる。

(2)式の右辺 Σ の中の sech^2 の項はいままで(無限空間の)ソリトンとして知られていたものである。第2項の $-2\beta\nu$ は (1)式の $e^{-\pi K x^2/K'}$ から来るものである。これは周期条件の下で考えた p10 の図のソリトンのように，あるいは p6 の図のようにつねに $e^{-r_n}-1<0$ の部分，すなわち谷の部分をもっている。この谷の深さは周期 N を大きくするにつれて浅くなっていくが $y=-\infty$ から ∞ まで和をとるようになる極限（周期条件で $N\to\infty$ に相当）でも有限の寄与を残すことになるのである。

§6. ソリトン

周期条件下のソリトンについて $N\gg 1$ の極限を考えよう。前節(5-3)からもわかるように $N=\lambda\gg 1$ とすると $\alpha\to 0$ となり，同時に $\nu\to 0$, $\beta\to 0$ にもなる。これをさけなければソリトンは消えてしまうから，母数 k を 1 に近づける必要がある。こうすると $K/K'\to\infty$ となって (5-3) の α は有限におさえられる。この極限では(5-1)はあるいは

$$\vartheta_0(x) \simeq 2\sqrt{K/K'}\; e^{-\frac{\pi K}{K'}\left(\frac{1}{4}+x^2\right)} \cosh\left(\frac{\pi K}{K'}x\right) \tag{1}$$

としてよい。これから $\beta=\frac{\pi K}{K'}\nu=$ 有限 の極限として

$$e^{-r_n}-1 \cong \beta^2 \mathrm{sech}^2(\alpha n-\beta t)-2\nu\beta \qquad \left(-\frac{N}{2}\le n<\frac{N}{2}\right) \quad (2)$$

を得る。ただしこの極限（$k\to 1$, $K'\to \pi/2$）では

$$\beta \cong 2K\nu \simeq \sinh\alpha, \quad 速度=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \nu=\beta/\alpha N \qquad (3)$$

が成り立つ。(2)の第2項は $N\to\infty$ で 0 であるが N が有限な限り残さなくてはならない。

$e^{-r_n}-1>0$ の山の部分は鎖の縮みを $e^{-r_n}-1<0$ の部分は伸びを与える。(2)の第2項は伸びを与えるものである。全体としての伸びを求めてみると $N\gg 1$ の場合として

$$\sum_{n=1}^{N} r_n = 2N\alpha\left\{\left(\frac{\sinh\alpha}{\alpha}\right)^2-1\right\}>0$$

これは常に正であって，ソリトンは山の部分で圧縮を与えるにも拘らず，そのすその部分で無限小ではあるが $\left(O(\frac{1}{N})\right)$，無視できない伸びの寄与を与え，全体としてソリトンは伸びを与えるものであることがわかる。