数理解析研究所講究録
第 83 巻 1970 年 102-111

対称非線型回路におけるソリトン

RCA基礎研　広田　良吾
鈴木　公男

§1. 序

一次元線型格子と梯子型のLC四端子網との対応はよく知られているが、一次元非線型格子も同様な非線型回路で置き換えられる。戸田によって発見された一次元格子振動におけるソリトン（格子ソリトン）も回路で実験的に求められた。その結果、回路がLow pass filterである事、即ちCut Off Frequencyが存在する事、と素子のCapacitanceが電圧増加によって減少する事が、格子ソリトン生成の充分　条件であると判明した。

戸田は一次元非線型格子振動を調べるために、ポテンシャルとして

$$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar \tag{1}$$

（a, bは正の定数、rは原子間の相対変位）を仮定して、格子ソリトンの解析的表現に成功した。戸田の格子ソリト

ンの運動方程式は回路の式に直すと、Normalizeした形で、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_n = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n \tag{2}$$

$$Q_n = \log(1+V_n) \tag{3}$$

となり、ソリトンは次の式で表わされる。

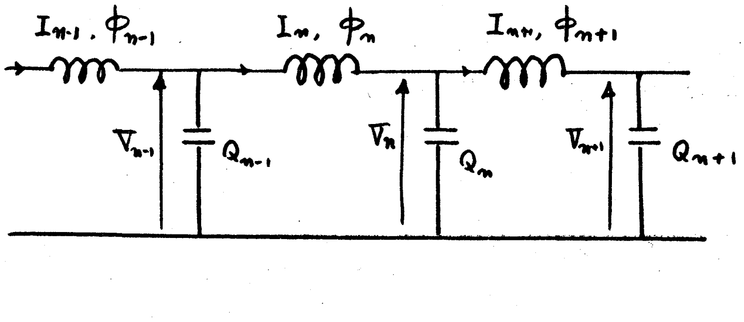
$$V_n(t) = \frac{\omega^2}{\cosh^2(\omega t - pn)}, \quad \omega = \sinh p \tag{4}$$

こゝで、$V_n(t)$はn番目のCapacitanceにかゝる電圧を表わす。

我々は回路の実験から、(1)式のポテンシャルのみがソリトンを生成させるポテンシャルでない事を知ったので、ソリトンの運動方程式の簡素化を試み、(2)式以外の非線型方程式にも格子ソリトン的性質をもつ解がある事を見出した。

§2. 対称非線型回路

下図に示す梯子型四端子網を考える。



n番目の Inductance を流れる電流を I_n, 磁束を Φ_n, n番目の Capacitance にかゝる電圧を V_n、そこに蓄積された charge を Q_n とすると、次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_n = I_n - I_{n+1} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_n = V_{n-1} - V_n \qquad (6) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

こゝで電圧－電荷の式、$Q_n = Q(V_n)$ と、電流－磁束の式 $\Phi_n = \Phi(I_n)$ が同じ形であると仮定し、$V_n = v_n$，$I_n = v_{n-\frac{1}{2}}$ とおけば、(5)、(6)式は一つの方程式にまとめられる：

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(v_n) = v_{n-\frac{1}{2}} - v_{n+\frac{1}{2}} . \qquad (7)$$

こゝで n は整数又は半整数。

i) 保存則

(7)式より次の保存則が証明される。

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} v_n(t)\, dt = 一定 \qquad (8)$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} v_n(t)\, v_{n+\frac{1}{2}}(t)\, dt = 一定 \qquad (9)$$

(9)式は Power の保存則を表わしている。

もしv_nが一定の速度ω/pで動いているならば：

$$v_n(t) = v(\omega t - pn), \tag{10}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_n(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(t)\,dt} = \frac{\omega}{p} \tag{11}$$

である。

二つの波V_n^0とv_nの相互作用を考える。今V_n^0と$V_n^0+v_n$がそれぞれ(7)式を満足すると仮定する：

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(V_n^0) = V_{n-\frac{1}{2}}^0 - V_{n+\frac{1}{2}}^0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(V_n^0 + v_n) = (V_{n-\frac{1}{2}}^0 + v_{n-\frac{1}{2}}) - (V_{n+\frac{1}{2}}^0 + v_{n+\frac{1}{2}}) \tag{13}$$

(13)式から(12)式を引いて次の方程式を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t} q(v_n ; V_n^0) = v_{n-\frac{1}{2}} - v_{n+\frac{1}{2}} \tag{14}$$

ここで $q(v_n ; V_n^0) = Q(V_n^0 + v_n) - Q(V_n^0)$ (15)

(14)式にv_nをかけて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[q(v_n;\,V_n^0)\,v_n - E(v_n;\,V_n^0)\right] + \frac{\partial V_n^0}{\partial t}\frac{\partial}{\partial V_n^0}E(v_n;\,V_n^0)$$

$$= v_{n-\frac{1}{2}}\,v_n - v_n\,v_{n+\frac{1}{2}} \tag{16}$$

こゝで $E(v_n;\,V_n^0) = \int_0^{v_n} q(v_n';\,V_n^0)\,dv_n'$ 。 (17)

(14) 式は二つの波が衝突する時の片方の波の Power の変化を表わしている。

ii) 連続体近似

(7) 式の右辺の差分を微分で置き換えると次の微分方程式が得られ、一般解が求められる。

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(v(t,x)) = -\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \tag{18}$$

又は $\quad Q'\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad Q' = \dfrac{\partial Q(v)}{\partial v}$ (19)

初期条件 $v(0,x) = F(-x)$ を満たす解は、

$$v(t,x) = F\left(\frac{t}{Q'} - x\right) \tag{20}$$

で与えられる。

§ 3. 非線型回路におけるソリトン

$Q(v_n)$ として次の形をとる

a)
$$Q(v_n) = \frac{v_n}{1+v_n} \tag{21}$$

その時、(7)式は

$$\frac{1}{(1+v_n)^2}\frac{\partial v_n}{\partial t} = v_{n-\frac{1}{2}} - v_{n+\frac{1}{2}} \text{。} \tag{22}$$

連続体近似では

$$\frac{1}{(1+v)^2}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{23}$$

解は

$$v(t, x) = F((1+v)^2 t - x) \text{。} \tag{24}$$

ソリトン的な(22)式の解は

$$v_n(t) = \frac{\omega^2}{\cosh^2 \xi} \tag{25}$$

$$\xi = 2\Omega t - 2pn \tag{26}$$

$$\omega = \sinh p \tag{27}$$

$$\Omega = \sinh p \cosh p \text{。} \tag{28}$$

Fourier分解は：

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_n(t)\, e^{i\omega' t}\, dt = \frac{\pi\omega^2\omega'}{4\Omega^2}\frac{e^{i\frac{\omega'}{\Omega}pn}}{\sinh\frac{\pi\omega'}{4\Omega}} \text{。} \tag{29}$$

b)

$$Q(u_n) = \tan^{-1} u_n . \tag{30}$$

その時(7)式は

$$\frac{1}{1+u_n^2}\frac{\partial u_n}{\partial t} = u_{n-\frac{1}{2}} - u_{n+\frac{1}{2}} \text{。} \tag{31}$$

連続体近似では

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{32}$$

解は

$$u(t,x) = F((1+u^2)t - x) \text{。} \tag{33}$$

(31)式の解は

i) ソリトン

$$u_n(t) = \frac{\omega}{\cosh \xi} \tag{34}$$

$$\xi = 2\omega t - 2pn \tag{35}$$

$$\omega = \sinh p \tag{36}$$

Fourier 分解は

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{i\omega' t} dt = \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\frac{\omega'}{\omega}pn}}{\cosh \frac{\pi\omega'}{4\omega}} \text{。} \tag{37}$$

このソリトンは、Pの値（波高）に関係なく

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{38}$$

という性質をもっている。この事実は任意の波 $V_n(t)$ がソリトンに分解する現象を考える時に大切である。(8)式の保存則と上式から $\int_{-\infty}^{\infty} V_n(t)\,dt \neq \frac{\pi}{2}\times$整数 であれば $V_n(t)$ はソリトンだけに分解するのでなく、それ以外の波が現われる事になる。

Total Power は P に比例する：

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n(t)\, U_{n-\frac{1}{2}}(t)\,dt = P \tag{39}$$

ii) ソリトンの衝突

二つのソリトンが同方向に走っている時 a)、逆方向に走っている時 b)、は次の式で表わされる。衝突時の波高は a) では低くなり b) では高くなる。b) の場合は Shock Wave によって物が破壊される現象を良く説明している。

a) 追突

$$\Pi_n(t) = \frac{\omega_1 \operatorname{sech}\xi_1 + \omega_2 \operatorname{sech}\xi_2}{\sinh\varphi \operatorname{sech}\xi_1 \operatorname{sech}\xi_2 + \cosh\varphi - \sinh\varphi \tanh\xi_1 \tanh\xi_2} \tag{40}$$

$$\xi_1 = 2\omega_1 t - 2P_1 n, \qquad \omega_1 = \sinh P_1 \tag{41}$$

$$\xi_2 = 2\omega_2 t - 2P_2 n, \qquad \omega_2 = \sinh P_2 \tag{42}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sinh p_1 \sinh p_2}{\cosh p_1 \cosh p_2 - 1} \tag{43}$$

衝突の時.

$$U_n(t) = (\omega_1 + \omega_2)\, e^{-\varphi} \quad , \text{ at } \xi_1 = \xi_2 = 0 。 \tag{44}$$

b) 正面衝突

$$U_n(t) = \frac{\omega_1 \operatorname{sech} \xi_1 + \omega_2 \operatorname{sech} \xi_2}{-\sin\varphi \operatorname{sech}\xi_1 \operatorname{sech}\xi_2 + \cosh\varphi + \sinh\varphi \tanh\xi_1 \tanh\xi_2} \tag{45}$$

$$\xi_1 = 2\omega_1 t - 2p_1 n \quad , \quad \omega_1 = \sinh p_1 \tag{46}$$

$$\xi_2 = 2\omega_2 t + 2p_2 n \quad , \quad \omega_2 = \sinh p_2 \tag{47}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sinh p_1 \sinh p_2}{\cosh p_1 \cosh p_2 + 1} \tag{48}$$

衝突の時.

$$U_n(t) = (\omega_1 + \omega_2)\, e^{\varphi} \quad , \text{ at } \xi_1 = \xi_2 = 0 。 \tag{49}$$

iii) 連成波

(31)式は連成波を示す解をもっているがそれには二種類あって、正負のソリトンが交互に並んだものa)、と同符号のソリ

トンが周期的に並んだものがある。b)。

a)

$$U_n(t) = k\omega \, \mathrm{cn}\, \xi \tag{50}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m s\omega}{\cosh s(\xi + 2m\mathrm{K})} \tag{51}$$

$$\xi = 2\omega t - 2pn \tag{52}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{sn}\, p}{\mathrm{dn}\, p}, \qquad s = \frac{\pi}{2\mathrm{K}'} \tag{53}$$

b)

$$U_n(t) = \omega \, \mathrm{dn}\, \xi \tag{54}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{s\omega}{\cosh s(\xi + 2m\mathrm{K})} \tag{55}$$

$$\xi = 2\omega t - 2pn \tag{56}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{sn}\, p}{\mathrm{cn}\, p}, \qquad s = \frac{\pi}{2\mathrm{K}'} \tag{57}$$

こゝで sn, cn, dn は Jacobi の楕円関数で、k は母数、K は第一種完全楕円積分、$\mathrm{K}'(k) = \mathrm{K}(\sqrt{1-k^2})$．$\mathrm{K}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{K}(1) = \infty$

$\mathrm{sn}(\xi, 0) = \sin\xi$, $\mathrm{cn}(\xi, 0) = \cos\xi$, $\mathrm{dn}(\xi, 0) = 1$

$\mathrm{sn}(\xi, 1) = \tanh\xi$, $\mathrm{cn}(\xi, 1) = \mathrm{sech}\,\xi$, $\mathrm{dn}(\xi, 1) = \mathrm{sech}\,\xi$ 。