数理解析研究所講究録
第83巻 1970年 112-125



# 非線形格子における波の伝播

法政大 教養　広岡 一

## §1. 序

非線形格子における波の伝播の問題は物理学において多くの興味ある対象であるが，その一つに熱伝導の問題がある。Visscher ら[1]は質量の異なった不純物粒子を含む無秩序格子（disordered lattice）で非線形相互作用をもつときの熱伝導係数を計算機実験から求めることを試みている。彼らは中心力と非中心力でつながれた2次元格子（$10 \times 50$）で，各最隣接粒子間に

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\mu x^3 + \frac{1}{4}\nu x^4$$

のポテンシャルをもつとして，$\mu = \nu = 0.0$ の調和振動子の場合と $\mu = 0.35$ ，$\nu = 0.069$ の非調和振動子の場合についての熱伝導を計算している。実験の結果は予測に反して一般に無秩序格子においては非調和なポテンシャルを含む場合の方が対応する調和振動子の場合よりも熱伝導が大きくなった。理論では非調和項はエネルギー伝播に対する抵抗を与え

熱伝導を小さくすると考えられる。ここでは Visscher らの実験の説明及び熱伝導の計算機シミュレーションの基礎としてもっと単純なモデルについての計算機実験を行い，非線形格子における波の伝播の様子及び不純物粒子の影響を調べた。

§2. 非線形格子における局在振動

ポテンシャルが

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\mu x^3$$

と

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\nu x^4$$

で与えられる様な3次，4次の非調和項を含む各々の場合に調和振動のときの局在振動に与える影響を調べた。一次元格子で中心に質量の異なる一個の不純物を含む場合に，初期条件として $t=0$ で不純物粒子を変位させ，他の粒子は静止しているときの波の伝播をしらべた。この様なときには調和振動子系では不純物粒子が他の粒子より軽い場合には，その粒子のまわりに局在振動を生じ，エネルギーが遠くへほとんど伝播しない。この性質は4次のポテンシャルを含むときにはより強められ，この場合には不純物粒子の質量が他の粒子に等しいときにも局在振動がみられる。これに反し

3次のポテンシャルのときには局在振動が弱められ，可成りのエネルギーがwave packetの形で安定に遠く迄伝達される。これらのことは上記で与えられるような条件では，4次の場合には不純物粒子の質量を軽くすると同じような効果を与え，3次の場合には重くする効果を与えている。3次のポテンシャルを含む場合についての変位及びwave packetの挙動を次の節に図示する。

§3. wave packetの時間挙動

両端が固定された一次元格子で3次のポテンシャル($\mu=0.4$)のときの波の伝播の様子及びそのときにみられるwave packetの軌跡を調べた。Fig. 1は粒子数$N=90$で30番目の格子点に重い粒子(質量比2)をおき，$t=0$でこの粒子に変位を与えた場合であり，(a)に時間に対する各粒子の変位の様子が示されている。重い粒子の処で減衰した変位が左右に大きなwave packetになって伝播してゆく。これは調和振動の場合にも同様であるが，このときにはwave packetの高さが次第に減衰してゆくのに反して，非線形格子では可成り安定な挙動を示す。(b)にこの2つのwave packetの最大値の位置の時間に対する軌跡が示されている。一定の速度で格子中を運動し，両端での反射，2つのpacketの衝突

，重い粒子との衝突に対しても安定で粒子的な振舞いとしており，soliton と似た挙動を示している。 Fig. 2 は代りに軽い粒子（質量比 0.5）を置いた時で，この場合には軽い粒子のまわりに局在振動が生じるが，残りのエネルギーは同様に wave packet で左右へ運ばれ，両端で反射した後に局在振動の処でも安定に通り抜けるのがみられる。 Fig. 3 は $N = 71$ の homogeneous な系での wave packet の形の時間変化及び軌跡を示している。 まわりの小さな高い振動数の波によって次第に wave packet の形がくずれてゆき，そのために最大値の点があいまいになるがほぼ一定の速度の運動をしている。 実線は一定の速度の運動としての軌跡であり，点線が大体の最大値の位置を結んだものである。 僅かな差がみられるが，これらの詳細なことは wave packet の安定性とともに更に検討を要することである。 以上の結果は Visscher らによって示唆された様に非調和項によってエネルギーの流れを増加する理由としては調和振動子系においては軽い質量の粒子のところで局在しやすい高い振動数のモードが非調和項のためにエネルギーを運びやすい低振動数のモードになるためと思われる。 この低振動数のモードは 1，2 個の不純物では余り影響されない。 wave packet の巾と同程度の impurity iland があれば影響をうけると思われ

る。

## §4. 今後の問題として

以上にみられるように非線形格子における熱伝導には soliton like な挙動を示す wave packet が重要な役割をはたしており，無秩序格子における熱伝導をシミュレートするためにはこれらの wave packet の安定性，impurity island の大きさ等の影響について更に調べる必要がある。非調和格子における低振動数のモードの挙動については Fermi ら[2)]の実験以来多く議論されているところであり，その再帰現象と chirikov ら[3)]及び我々[4)]による非線形項の大きなとき（大きな振巾のとき）には運動が random になり熱平衡に接近しうるという結果にはまだ問題が残されている。しかしこの gap は一つには各々の実験条件に用いられた格子振動子系がどの程度まで KdV 方程式の soliton の運動で記述出来るかにあると思う。格子振動子系で初期条件の非線形項（例えば振巾）を大きくしていくことは KdV 方程式

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$$

で $\beta$ を小さくすることに対応している。Karpman ら[5)]は同じ初期条件に対して $\beta$ を小さくして行くと次第に多くの soliton

にわかれることを示した。 Fermi らの場合は 9個の soliton にわかれる様なときであり，もっと大きな非線形にしてゆくときには次第により多くの soliton にわかれ，あるところで格子系では完全に soliton にわかれてしまう状態は実現されないところが生じ，これ以上では random な挙動を示すと考えられる。 このことは導るKdV方程式において $\beta \to 0$ にしたときにショツクが生じることに対応しているものと思われる。 これらの点は非線形格子の熱伝導における低周波数のモードの life time の関連とともに現在検討中である。

文献


1) D. N. Payton, III, M. Rich and W. M. Visscher; Phys. Rev. 160 (1967) 706.

2) E. Fermi, J. R. Pasta and S. Ulam; Los Alamos Report No. 1940 (1955).

3) F. M. Israiliev and B. V. Chirikov; Soviet Physics-Doklady 11 (1966) 30.

4) N. Ooyama, H. Hirooka and N. Saitô; J. Phys. Soc. Japan 27 (1969) 815

5) Yu. A. Berezin and V. I. Karpman; Soviet Physics JETP 24 (1967) 1049.

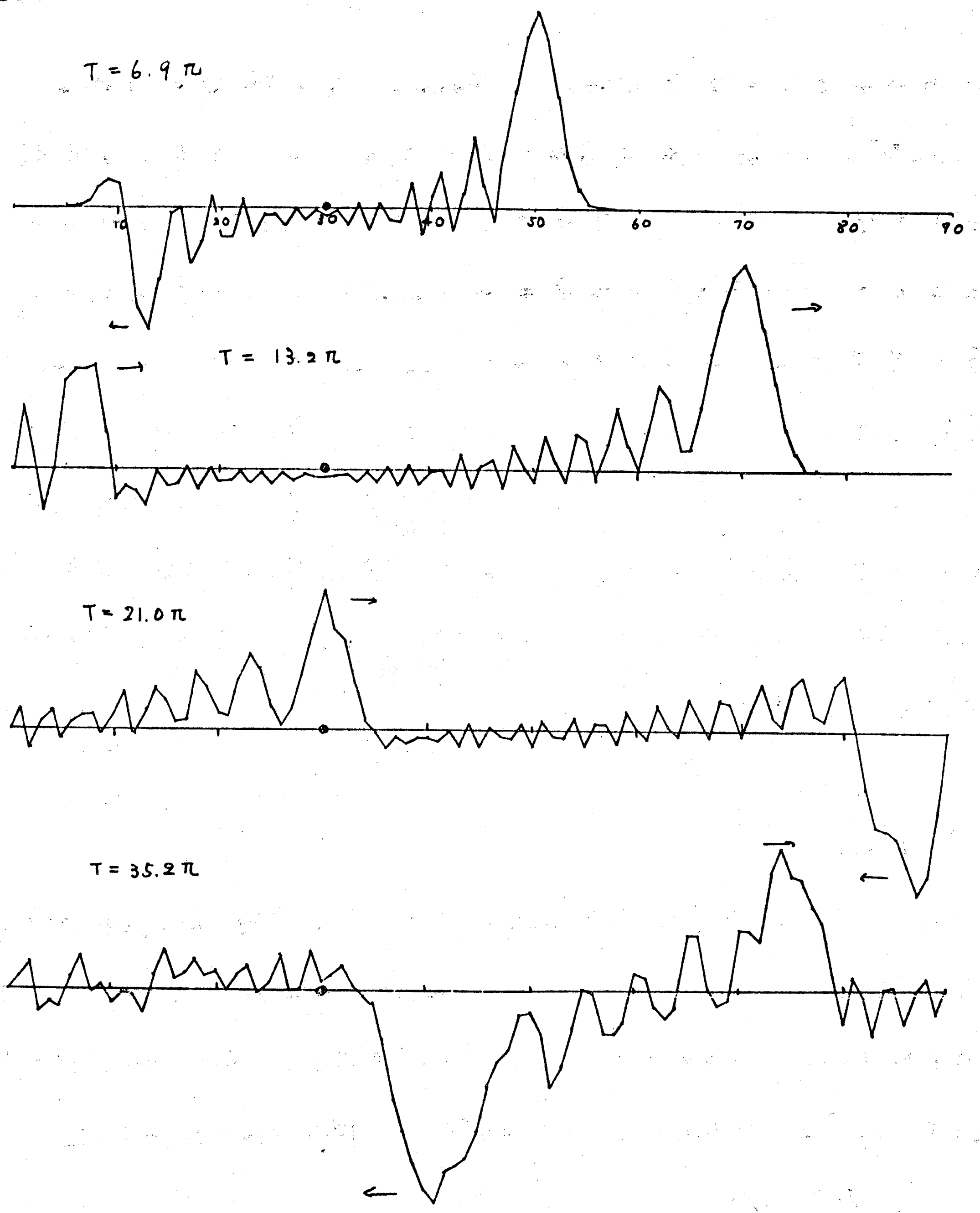



Fig. 1a, T=0で30番目の位置の重い粒子(質量2)に変位を与え離したときの波の伝播，縦軸は変位，横軸は格子位置を表わす (N=90, λ=0.4)

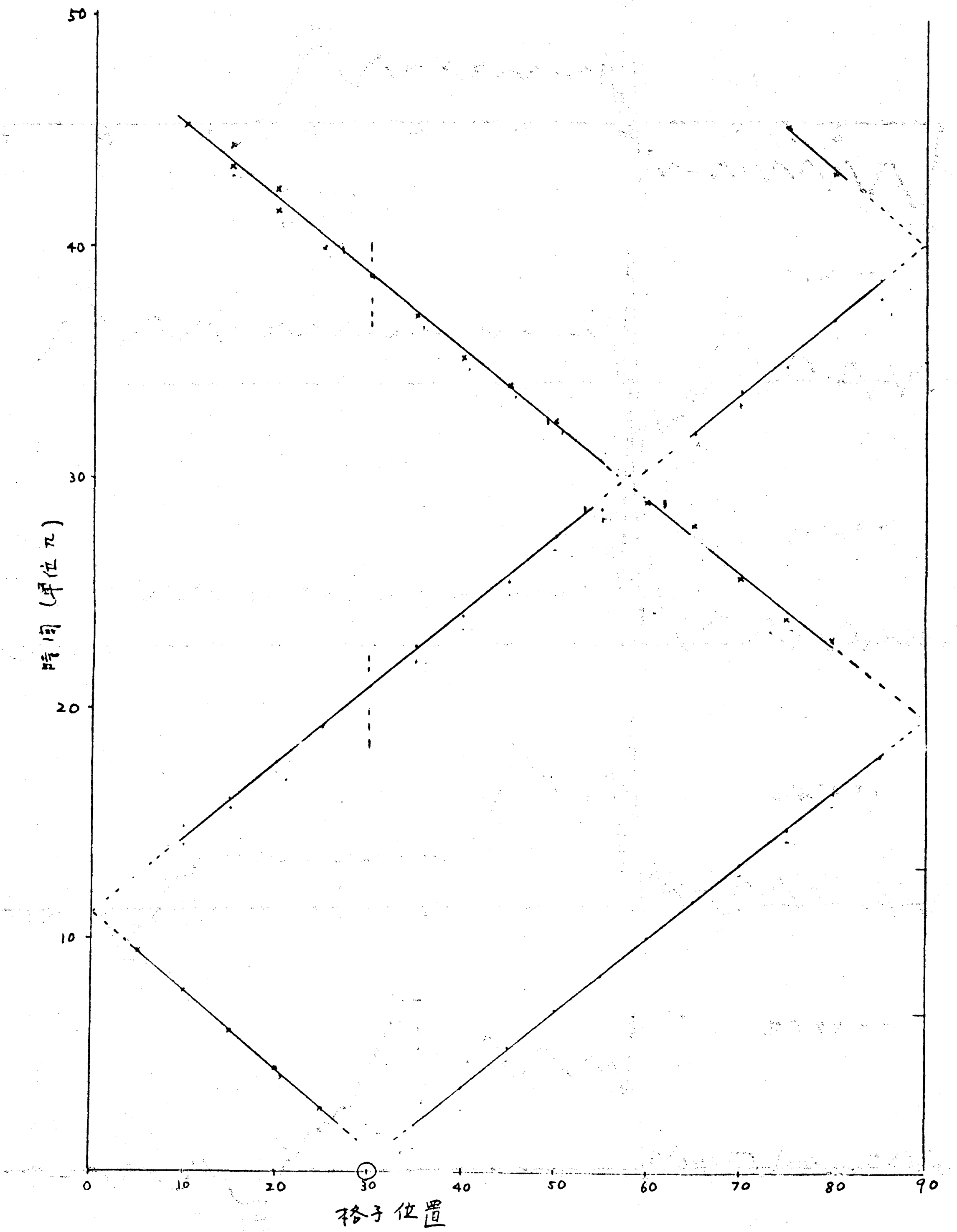
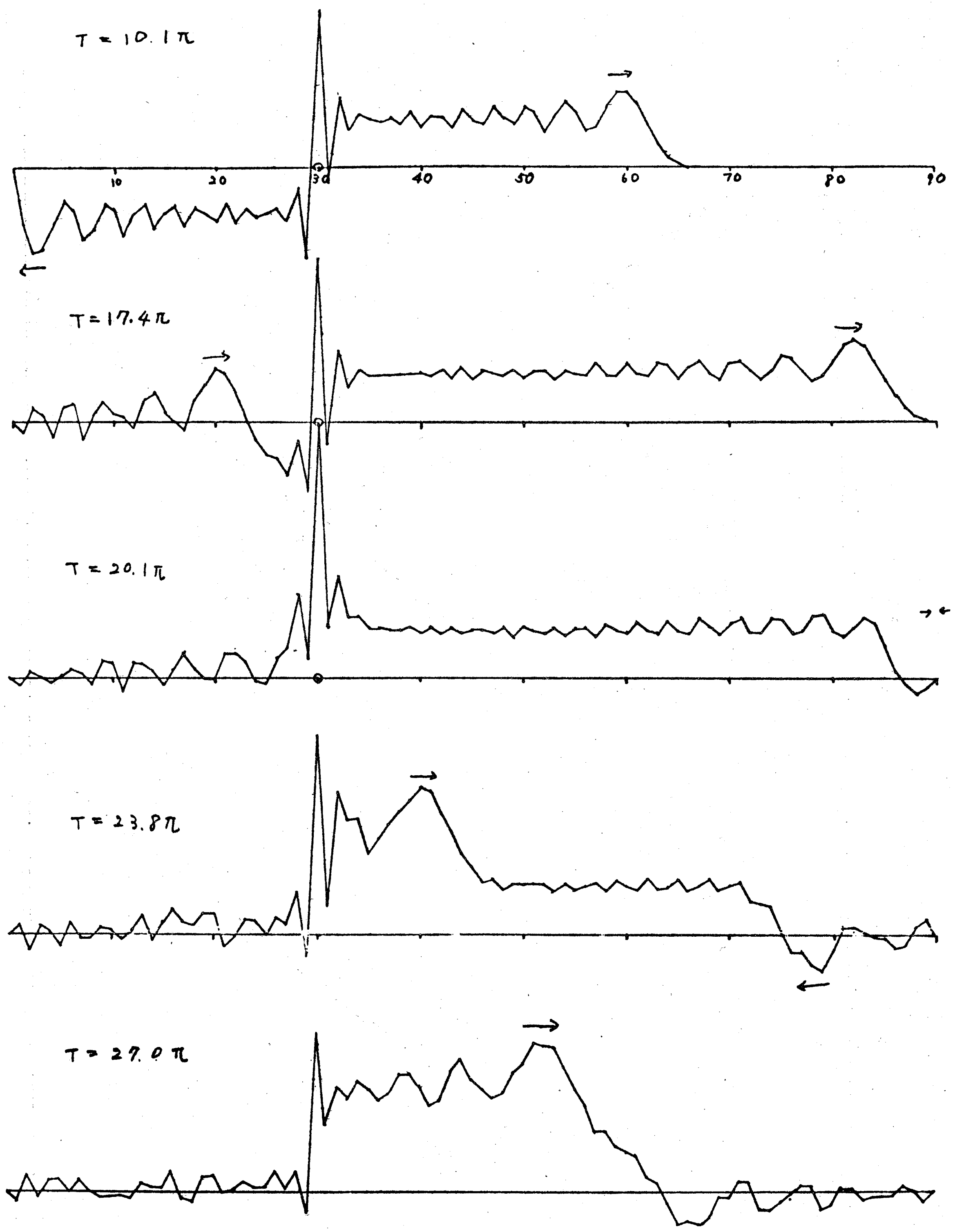



Fig. 1b，　Fig 1a における２つの Wave packet の最大値の格子点の軌跡．


T = 10.1π
10
20
30
40
50
60
70
80
90
T = 17.4π
T = 20.1π
T = 23.8π
T = 27.0π

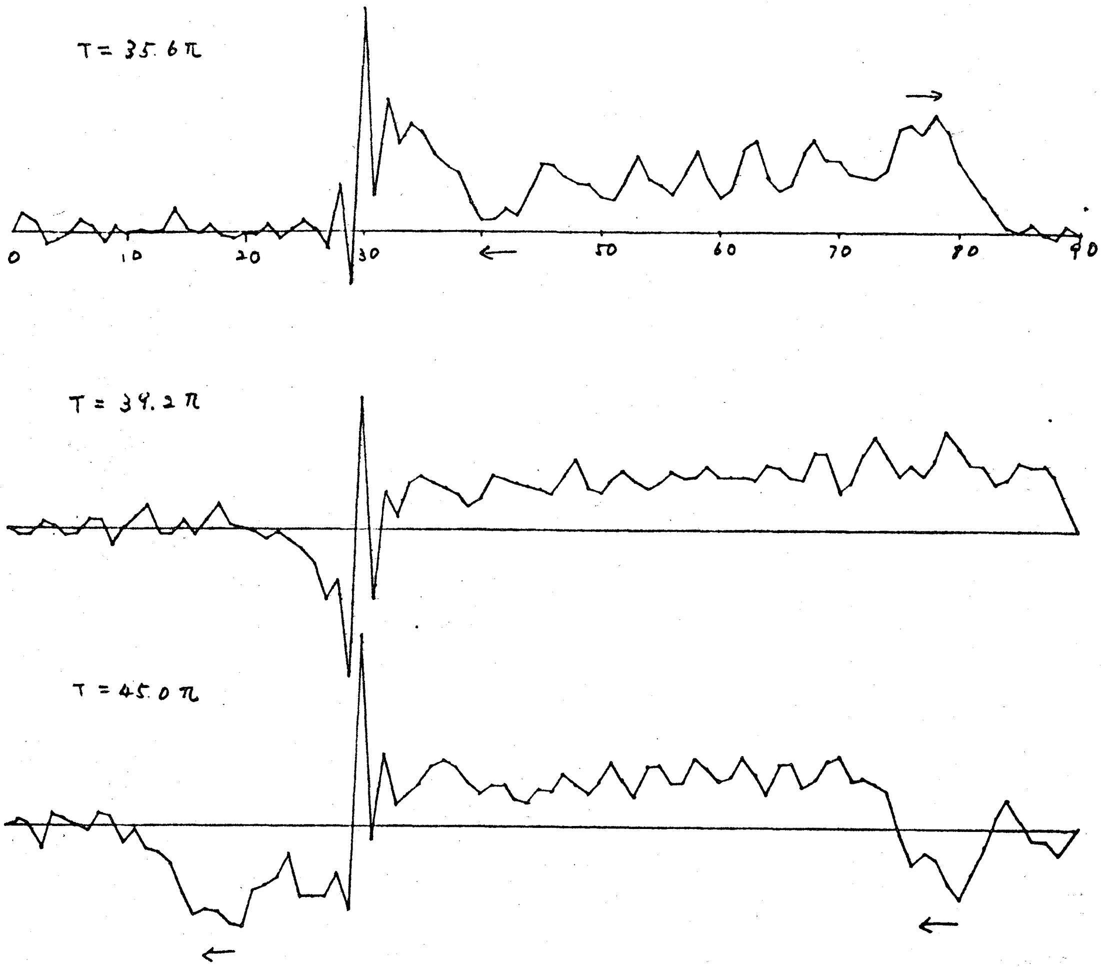



Fig 2a, T=0で30番目の位置の軽い粒子（質量 0.5）に変位を与え離したときの波の伝播，縦軸は変位，横軸は格子位置を表わす
（$N=90$, $\lambda=0.4$）

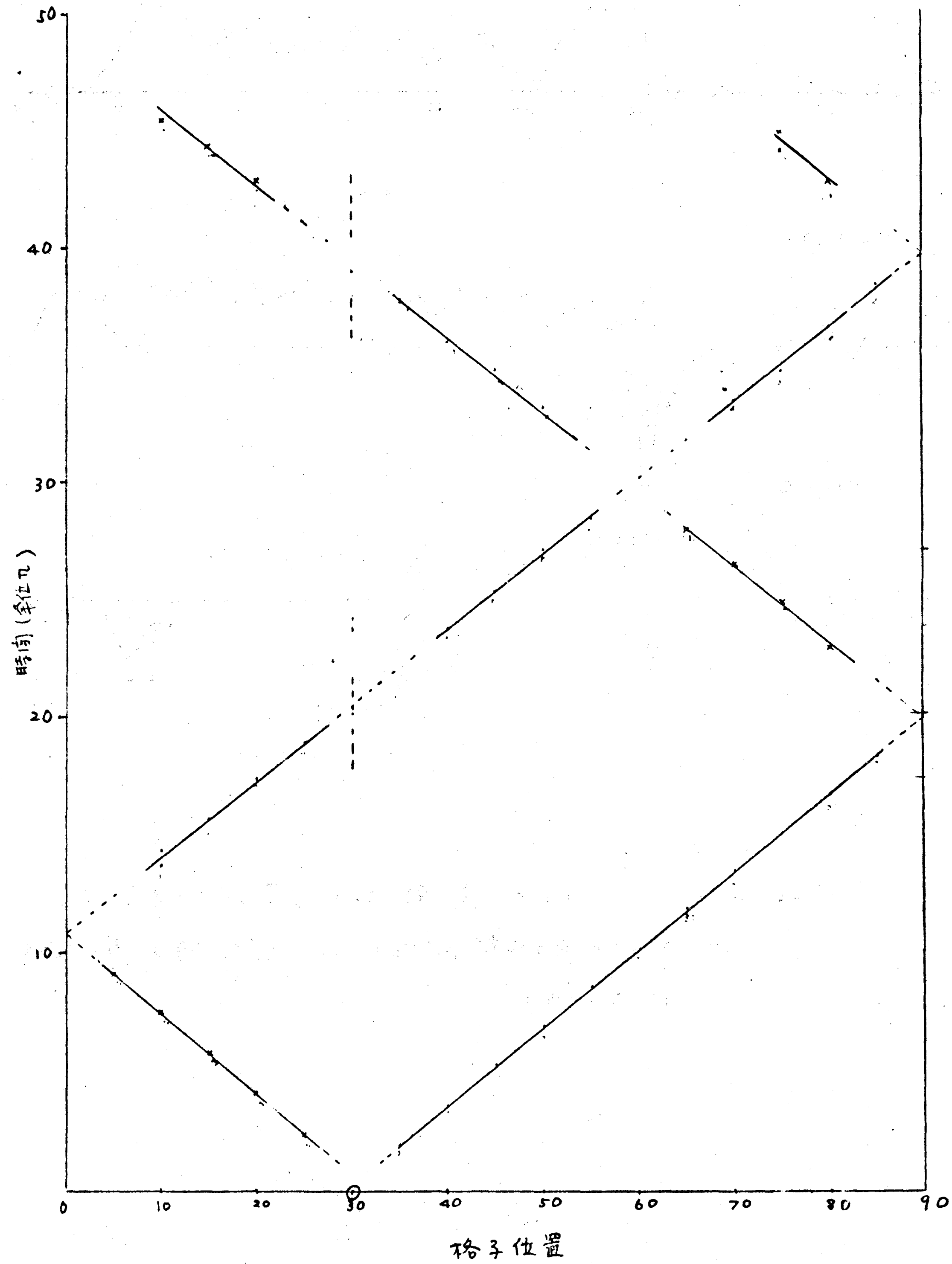
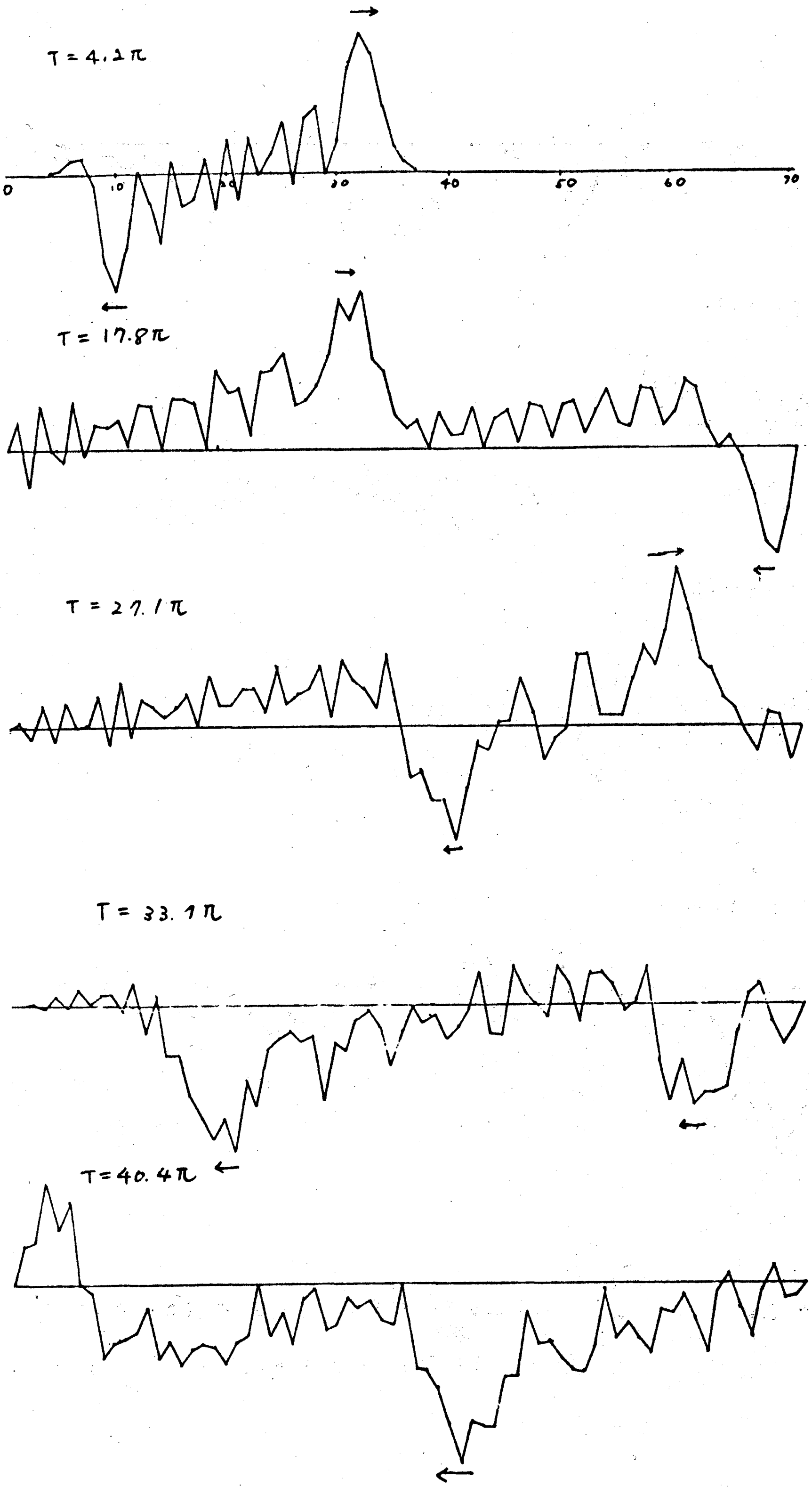



Fig. 2b, Fig. 2a における 2つの wave packet の最大値の格子点の軌跡.


T = 4.2π
0
10
20
30
40
50
60
70
T = 17.8π
T = 27.1π
T = 33.1π
T=40.4π

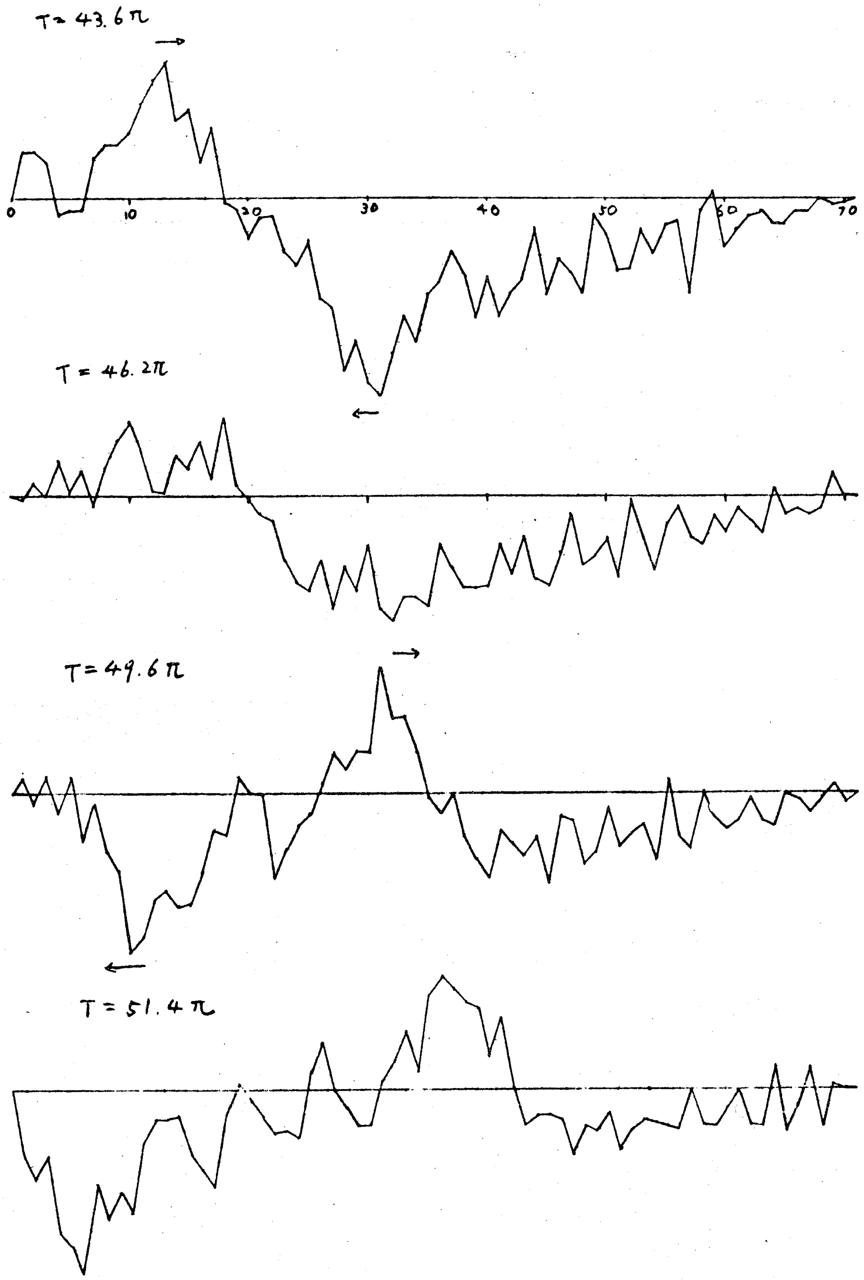



Fig. 3a, homogeneous な格子で $t=0$ で 20 番目の位置の粒子に変位を与え離したときの波の伝播 ($N=71$, $\lambda=0.4$)

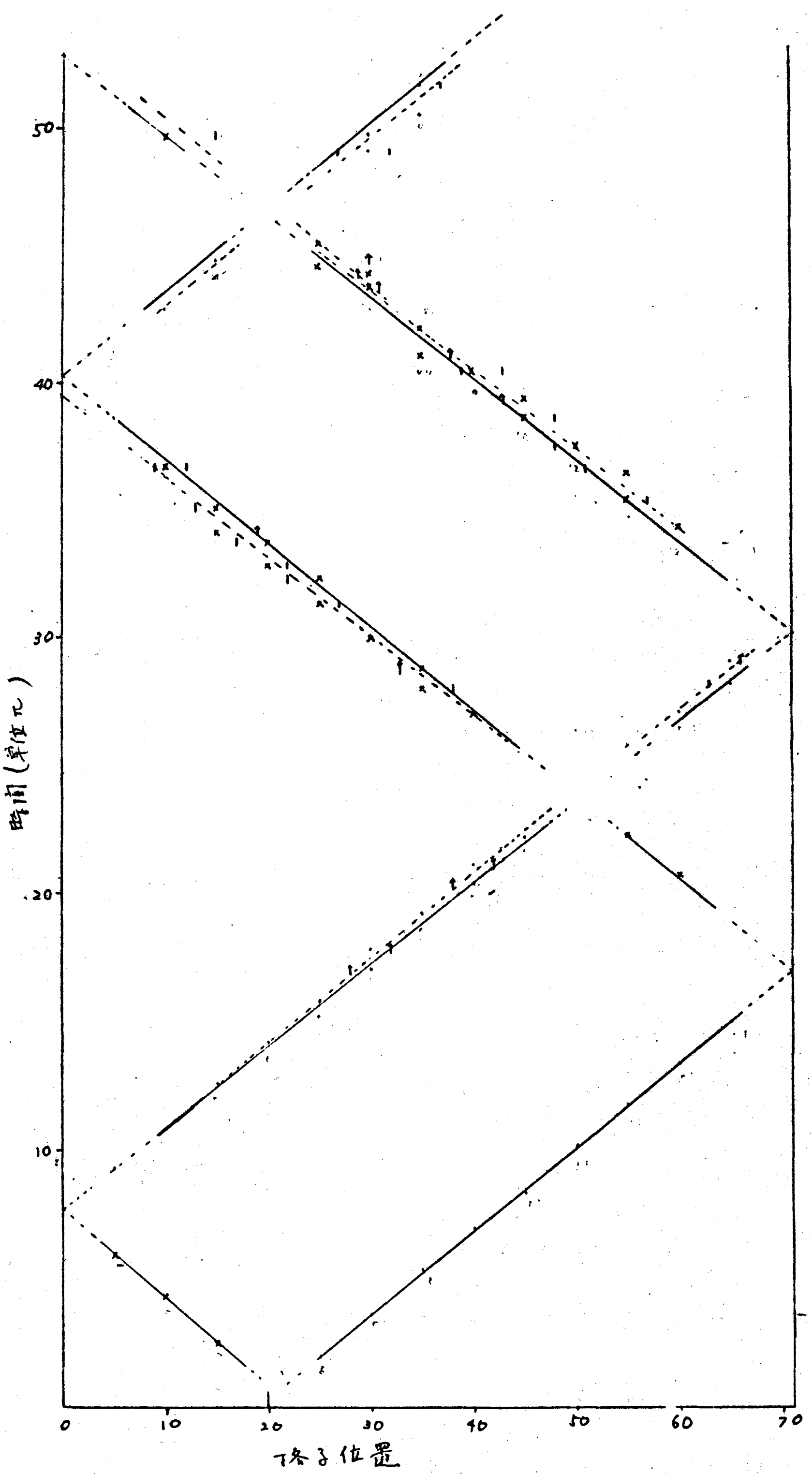



Fig.3b, 'Fig 3a の 2つの wave packet の最大値の位置の軌跡.
（点線）, 実線は一定の速度の運動としたときの軌跡.