数理解析研究所講究録
第 83 巻 1970 年 126-135

弱電離プラズマにおける非線形波動

京大 理　佐藤哲也

§1. 序

連続体媒質中の非線形波の伝播を記述する簡単なモデル方程式のなかで、分散性を有する場合の代表的な方程式としていわゆる Korteweg-de Vries 方程式があり、散逸性を有する場合として Burgers 方程式がある。前者に対しては定常解（例えばソリトン解）が知られており、その Cauchy 問題に対する解の大域的存在定理が作られている（毛高氏の項参照）。これに対して Burgers 方程式はその正確な解の型までが求められている。しかしながら一般の現象では分散性及び散逸性を同時に有する場合が多く単純にソリトン解あるいは衝撃波で表わすことができない。問題をプラズマに限った場合、適当な条件の下では方程式系を KdV 方程式や Burgers 方程式に帰することが可能であるが（例えば Taniuchi and Wei, J. Phys. Soc. of Japan, 24, 941, 1968）、こ

れも かなり限られた条件に対してである。

ここでのべる話は 線形的にも分散性及び散逸性を同時にそなえた不安定波動（弱電離プラズマ中に発生する超低周波の縦波）の非線形的振舞いの数値解についてである。結論から先にのべると 散逸効果が大きい場合には 周期条件の下で 鋸歯状波的な定常解（ $n(x-ct)$ なる型）が存在し、散逸効果が小さくなるにつれて 波束的（packet-like）な局在波になるということである。

§2．系の記述

今、磁場（均一）B_0 の存在する弱電離プラズマ中の低周波モード（縦波）を考える。この場合、系を記述する方程式系は 連続の式及び流れの式を準中性条件（ $n^+ \simeq n^- \equiv n$ ）の下で連立させることによって得られる。これらの式を結合することによって次のような非線形2階連立偏微分方程式を得る．

$$\frac{\partial n}{\partial t} \pm \mu^{\pm} T^{\pm}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(n E_j) - D^{\pm} T^{\pm}_{ij} \frac{\partial^2 n}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (1)$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

ここに n は電子密度（正イオン密度）、E_j は電場の j-成分を示す。添字の "＋"、"－" はそれぞれ電子及び（正）イオンに対する量を表わす。$\mu^{\pm} T^{\pm}_{ij}$ 及び $D^{\pm} T^{\pm}_{ij}$ は電子及

びイオンの移動度テンソル及び拡散テンソルを表わす。(1)式は3次元(空間座標に関し)表示であるが、今簡単のため、系の配位を次のように定める。即ち[図1]のような直交座標系を考え、磁場$\underset{\sim}{B_0}$が x軸に、直流の外部電場$\underset{\sim}{E_A}$ 及びプラズマの密度勾配(不均一性) $\underset{\sim}{\nabla} n_0(z)$ が z軸に沿ってのみ存在し、波(擾乱波)はy軸に沿ってのみ伝播する場合を考えることにする(問題を一次元化)。

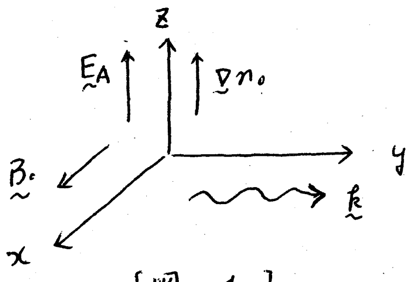
まず、擾乱が存在しない場合の平均場($\frac{\partial}{\partial t}=0$)の解を考える。(1)式において、$x$, y方向に対しては均一($\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}=0$)であることから この式は$z$に関する常微分方程式となる。一つの解として次のような解を得ることができる。即ち

$$\frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dz} = \kappa \quad (\text{定数}),\ \text{即ち}\quad n_0(z) = n_0(0)\,e^{\kappa z} \qquad (2)$$

及び
$$E_0 = \frac{D_\perp^+ - D_\perp^-}{\mu_\perp^+ + \mu_\perp^-}\kappa + E_A \qquad (3)$$

ここに $\mu_\perp^\pm = \mu^\pm T_{33}^\pm$, $D_\perp^\pm = D^\pm T_{33}^\pm$。

次に (2), (3)式で示される平均場に y方向に伝播する擾乱を加えた場合の波の線形分散関係についてのべる。結果のみを示すと、[図1]の配位の下での線形解析の結

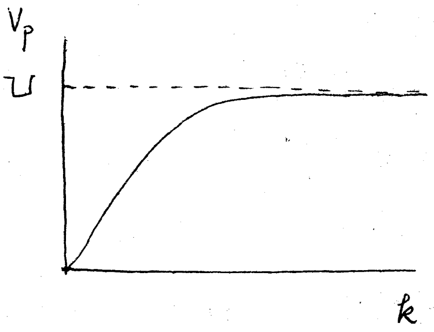


[図 1]

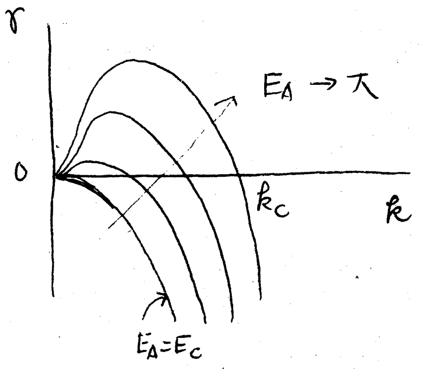
果、微小振巾波の位相速度 V_p 対 波数 k の関係は［図2］の如くなる。図中の U はプラズマの代表的な流れの速さ（$E_0 \times B_0$ によるドリフト速度）で

$$U = \frac{\mu_\perp^+}{\mu_\perp^+ + \mu_\perp^-} \mu_H^- E_0$$

で示される。ここに μ_H^- は Hall 移動度を示す。この図より波の Mach 数 $M = U/V_p$ は1より大となり波は衝撃波的な振舞いをすることが期待される。



［図 2］



［図 3］

次に波の成長率 γ（減衰率 $-\gamma$）に関しては外部電場 E_A がある臨界値 E_c 以上の場合には［図3］のようにある波数領域（$k \leq k_c$）で不安定（$\gamma > 0$）となり $k > k_c$ では減衰（散逸性）である。図に示すように E_A を E_c より大きくするに従って k_c は大きくなり散逸領域が狭くなる。いいかえると E_A が E_c に近づくにつれ系はより散逸的となり、E_A が逆に E_c より大きくなるにつれ散逸効果が小さくなることを示している。従って衝撃波的な性格が少なくなることが予想される。

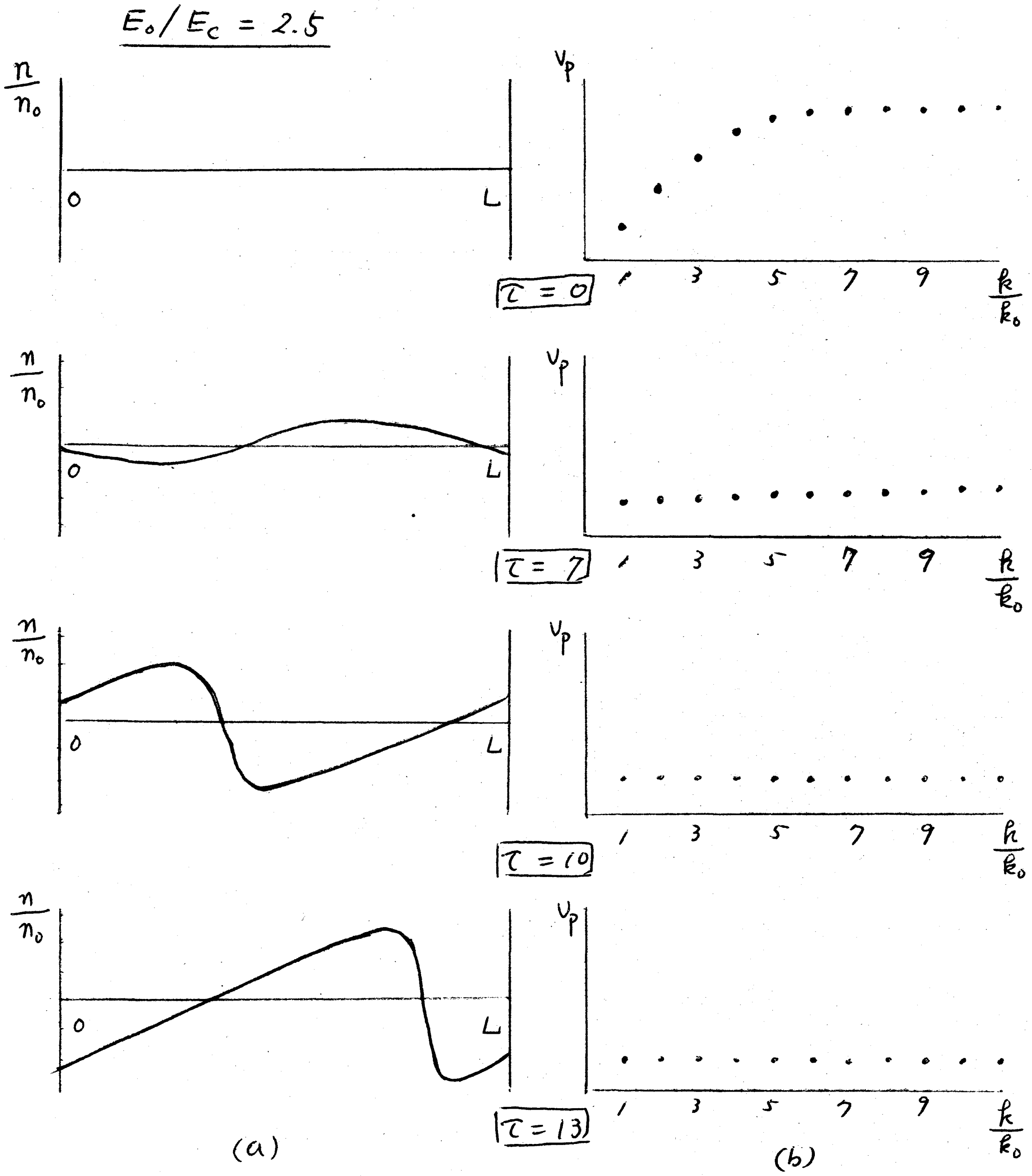
この波動は KdV方程式や Burgers 方程式の波と異なり、外場というエネルギー供給源につながれているために 方程式に非斉次項（source term）が加わり，そのために 波は不安定（成長モード）となる。プラズマという立場からは 正にこのことが問題を面白くし、この成長する波がどのような非線形相互作用によって制御されるのかが興味の対象であるが ここではこの効果の解析についてはふれないことにして 次節では 数値解析で得た 波の振舞いの例を簡単に紹介することにとどめる。

§3．数値解析 ―波の振舞い―

〔図1〕の配位の下で 一次元化された（1）式 を初期値問題として解く。その際 波（y方向に伝播）は周期境界条件（周期 L）に従うものとする。

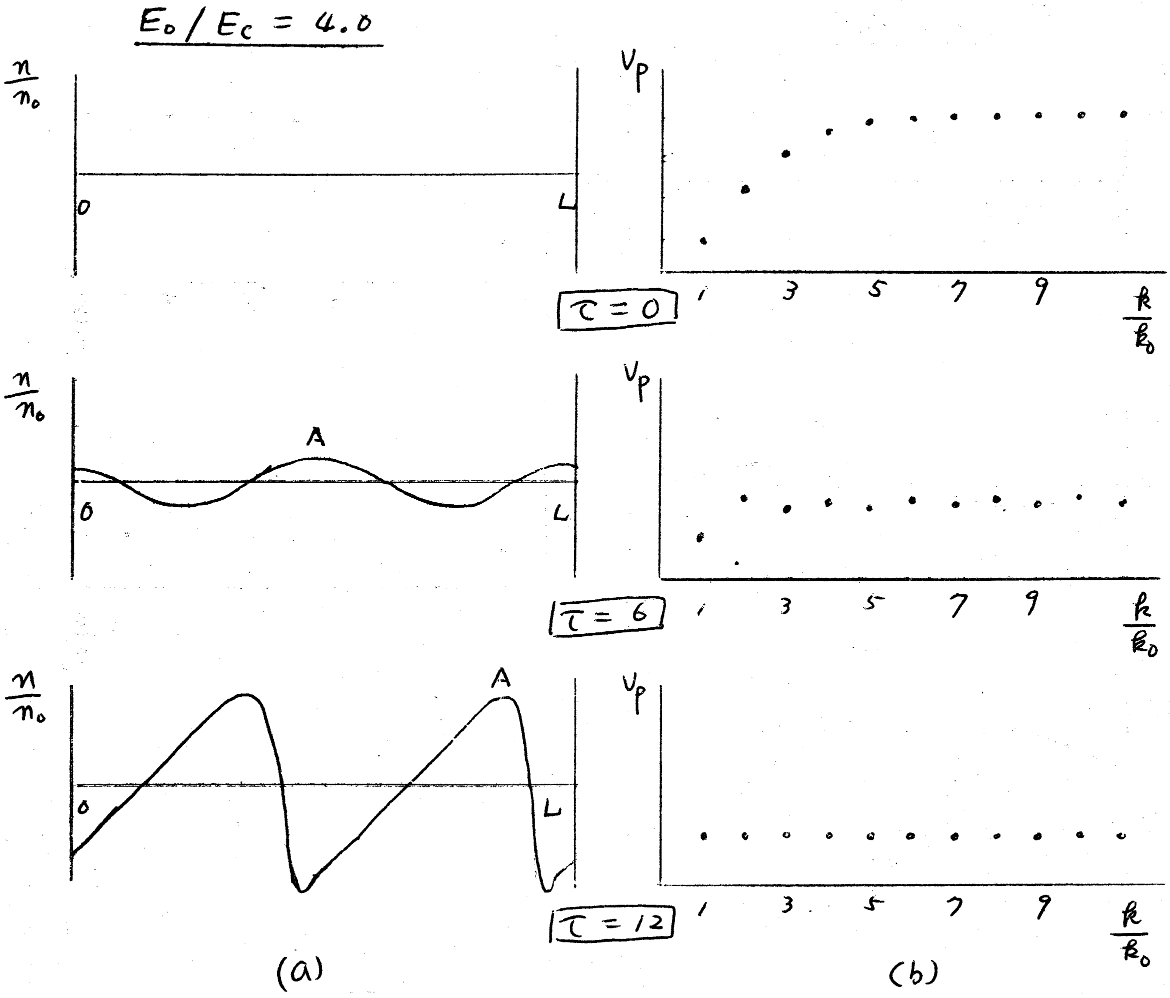
[図4]の説明

(a) 図は $E_0/E_c = 2.5$ に対する 波（密度波）の時間発展を示す図で (b)図は 対応する時刻（τ）での各フーリエ・モード（基本波数 $k_0 = 2\pi/L$）の位相速度を示す。初期擾乱波としては 振巾 $|n/n_0|$ が 10^{-3} なるランダム雑音を用いている。この図より $\tau > 10$ で位相速度がすべてのモードに対して一定となり 定常



［図 4］

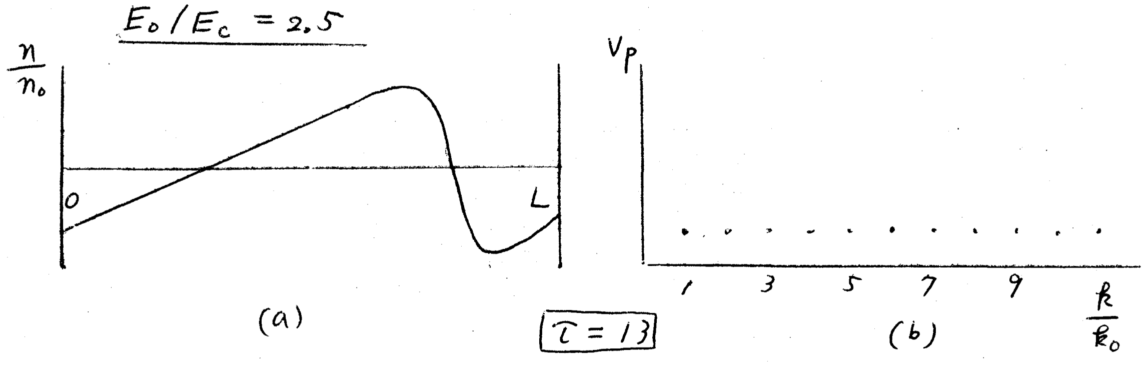
解が得られたことを示している。更にその波形は鋸歯状波的である。尚この例では 基本波（$k/k_0=1$）が最大成長率をもっていることに注意されたい。



［図　5］

［図5］の説明

［図4］と同じ計算で　$E_0/E_c = 4.0$　とした場合の波形の時間変化及び位相速度の時間変化を示す図である。この時の最大成長率をもつモードは第二高調波（$k/k_0 = 2$）である。［図4］の場合と同様　$\tau = 12$ で各モードの位相速度が揃っており定常解が存在することを示している。このときの波形もやはり鋸歯状波である。



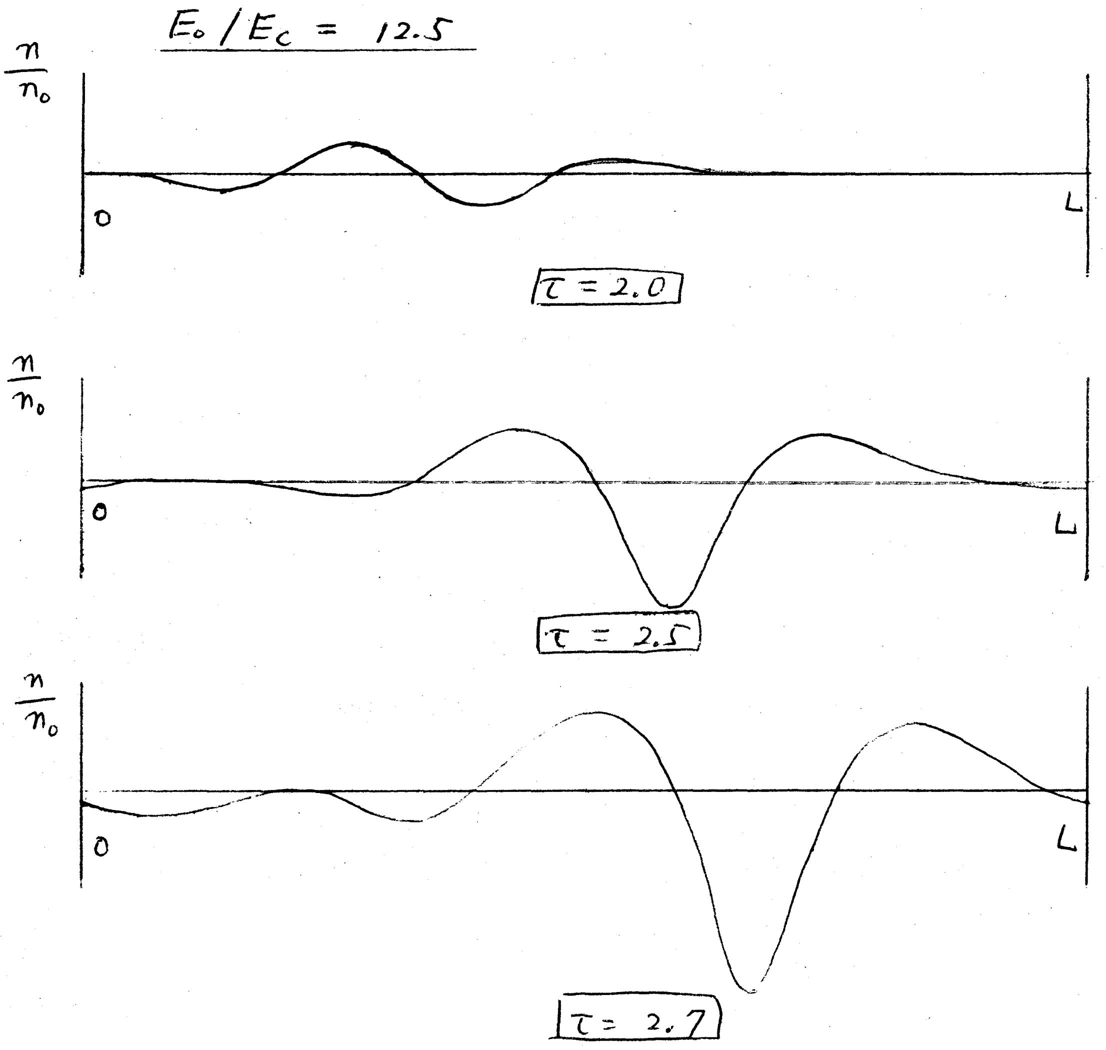
［図 6］

［図 6］の説明

この図は異なった初期条件から出発したとき同じ解に到達するかどうかをみるために行なった数値計算で［図5］の $\tau=12$ における状態を初期（$\tau=0$）として電場を $E_0/E_c=4.0$ から 2.5 に変え、$\tau=13$ における波形（a）及び位相速度(b)の関係を示したものである。この図と［図4］の $\tau=13$ における図を比較すると波形及び位相速度は完全に一致しており、得られた定常解が一意的であることを暗示している。

［図 7］の説明

［図4］～［図6］では E_0 が比較的小さく、従って散逸効果の大きな場合に対する数値解であったが、E_0 を更に大きくし、散逸効果を少なくした場合、どのような波形に



〔図 7〕

なるかを知るために計算した一例が〔図7〕である。図は $E_0/E_c=12.5$ に対する波形の時間変化を示している。この図からわかる通り、E_0 を大きくした場合、波は局在した波形となることに注目されたい。このような波束的な波形は $E_0>5E_c$ に対して常に生じ、$E_0=5E_c$ を境いにして波形が鋸歯状波から波束状に解の性質が変

化することを示している。この $E_0=5E_c$ なる値は理論的に予想される値であるが、ここではこの点については割愛させていただく。尚、[図7] で得られた波形が一意性を有するかどうかの数値解析による検査は行なっていないことを附け加えておく。

以上「ソリトン研究会」という標題とはかなりかけはなれた内容のお話しをしたが、分散性及び散逸性を有する波動(不安定)の数値解析の一例を示し、散逸性が強い場合には Burgers 方程式的な解を得、散逸性が弱くなるにつれ、ソリトンではないが局在したモードになることをお話しした。更に電場 E_0 を大きくしていった場合、あるいわ、ソリトン的な波が得られるかもしれないが、現在、その計算を続行中であり、近いうちに結果が得られるものと思う。