

垂直壁に沿って流れる
層の上の波について

東農工大 工、高木 隆 司

§ 1. 序

垂直壁に沿って、重力の作用のもとに流れ落ちているうすい液体の層を考える。この層の上には、流量などの条件によって波動が生じることがある。流量が小さな値の時には、粘性の影響が強く、乱れた流れにならない。^{リ⁶}ここでは、そのような小さな流量の範囲で、上流と下流とでその値を与え、中間に生ずる波の様子を調べることにする。表面張力がない場合について Mei⁷⁾の解析があるが、ここでは表面張力も考える。

§ 2. 基礎方程式

第1図のように座標系を選ぶ。速度場を $u = (u, v)$ とし、層の厚さを $y = a_0 + \eta(x, t)$ であらわすと、ナヴィエ・ストークス方程式、連続の式、壁面および自由表面での境界条件は次のようになる。

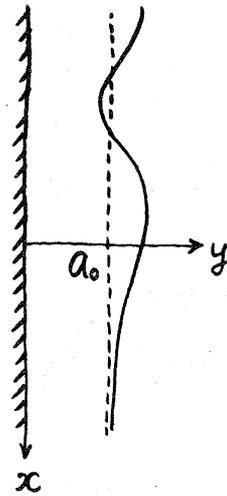
$$(1a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g + \nu \Delta u,$$

$$(1b) \quad \nabla u = 0,$$

$$(2) \quad u = 0 \quad (y = 0),$$

$$(3) \quad p n_i = \sigma_{ik} n_k - \frac{\sigma}{R_a} n_i \quad (y = a_0 + \eta),$$

$$(4) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \nu \quad (y = a_0 + \eta).$$



(第1.図)

ここで、 g は重力加速度、 n_i は自由表面の法線ベクトル、 σ は表面張力係数、 σ_{ij} は次式で定義される粘性応力テンソル

$$(5) \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

R_a は、自由表面の曲率半径で、次式であらわされる。

$$(6) \quad \frac{1}{R_a} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\}^{-3/2}.$$

(3)式の、自由表面の接線成分と、法線成分を表面に沿って微分した式とは、それぞれ

$$(7) \quad \left[\sum_k \sigma_{ik} n_k, n_j \right] = 0 \quad (\text{ベクトル積}),$$

$$(8) \quad \left(n_y \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-p + \sigma_{ik} n_i n_k - \frac{\sigma}{R_a} \right) = 0,$$

まず、無限下流には波はないとして、そこでの速度分布を求めると次式のようなになる。

$$(9) \quad U(y) = \frac{g a_0^2}{2\nu} \left(2 \frac{y}{a_0} - \frac{y^2}{a_0^2} \right).$$

波動をとまなつた流れの速度場を、(1b) を恒等的に満すように流れの関数 ϕ を使って次のようにあらわす。

$$(10) \quad u = U(y) + \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

$U(a_0)$ と a_0 によつて物理量を無次元化し、方程式(1), 境界条件(2), (7), (8), (4) を書き下すと次のようになる。ただし、無次元量にも、今までと同じ文字を使った。

$$(11) \quad \Delta \phi_t + (\phi_y + 2 - 2y) \Delta \phi_x - \phi_x (\Delta \phi_y - 2) = \frac{1}{R} \Delta^2 \phi,$$

$$(12) \quad \phi_y = \phi_x = 0 \quad (y=0),$$

$$(13) \quad (\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2 - 2y)(1 - \eta_x^2) - 4\phi_{yx} \eta_x = 0 \quad (y=1+\eta),$$

$$(14) \quad \phi_{yt} + (\phi_y + 2y - y^2) \phi_{yx} - \phi_x (\phi_{yy} + 2 - 2y) - \frac{1}{R} \Delta \phi_y \\ + \eta_x \left\{ \phi_{xt} - (\phi_y + 2y - y^2) \phi_{xx} + \phi_x \phi_{xy} + \frac{1}{R} \Delta \phi_x \right\} \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{R(1+\eta_x^2)} \left\{ 2\eta_x^2 \phi_{xy} - 2\eta_x (\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2 - 2y) - 2\phi_{xy} \right\} \right] \\ - \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta_{xx} (1+\eta_x^2)^{-3/2} \right\} = 0 \quad (y=1+\eta),$$

$$(15) \quad \eta_t + (\phi_y + 2y - y^2) \eta_x = -\phi_x \quad (y = 1 + \eta).$$

ここで、

$$(16) \quad R = \frac{U(a_0) a_0}{\nu} = \frac{g a_0^3}{2\nu^2},$$

$$(17) \quad \Gamma = \frac{\sigma}{\rho U(a_0)^2 a_0} = \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{2}{\nu^4 g} \right)^{1/3} R^{-5/3} \equiv G \cdot R^{-5/3}.$$

G は物質によって決まっている数で、 15°C の水についてはその値は約 3633 である。

§ 3. 近似

前節に導かれた方程式と境界条件を、適当な近似を行ってあつかいやすくする。まず長い波長の極限を考え、 x, t についての微分を無視する。ただし、(15)式の各項は皆同じ程度の大きさだから、それらは残しておく。この近似により、

$$(18) \quad \begin{cases} \phi_{yyyy} = 0, & \phi_x = \phi_y = 0 \quad (y=0), \\ \phi_{yy} = 2\eta \quad (y=1+\eta), & \phi_{yyy} = 0 \quad (y=1+\eta), \end{cases}$$

$$(19) \quad \eta_t + (\phi_y + 2y - y^2) \eta_x = -\phi_x \quad (y = 1 + \eta),$$

を得る。(18)の解を(19)に代入すると次式を得る。

$$(20) \quad \eta_t + 2(1+\eta)^2 \eta_x = 0.$$

これから、波の位相速度が層の厚さに依存することがわかる。すると、初期にはゆっくり変化する波でも、しだいに押しやらめられ、終には α 微分が無視できなくなるであろう。層の厚さ a_0 が小さいときには、 R が小さく、 Γ が大きくなるので、 α 微分を含む項で一番寄与すると思われるのは、(14)式の $\Gamma \eta_{xxx}$ である。この項を残し、あとは上と同様の計算を行なうと、(20)のかわりに次式を得る。

$$(21) \quad \eta_t = - \left\{ \frac{1}{3} \eta_{\xi\xi\xi} (1+\eta)^3 + \frac{2}{3} (1+\eta)^3 \right\} \xi.$$

ただし、

$$(22) \quad \tau = (R\Gamma)^{-1/3} t, \quad \xi = (R\Gamma)^{-1/3} x.$$

以下、(21)で記述される波動の様子を議論する。

§4. 定常状態

τ についての微分を、定数 C を使って

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = -C \frac{\partial}{\partial \xi}$$

と書ける場合を定常状態と呼ぶ。(21)を一回積分し、境界条件($\xi \rightarrow \infty$ で $\eta \rightarrow 0$)を使うと、次の常微分方程式を得る。

$$(24) \quad \frac{1}{3} \eta_{\xi\xi\xi} = \left\{ (C-2)\eta - 2\eta^2 - \frac{2}{3}\eta^3 \right\} (1+\eta)^{-3}$$

今、無限上流での厚さを $1+\eta_0$ (η_0 は定数) とし、これを (24) に代入すると次のような η_0 と C との関係式を得る。

$$(25) \quad C = 2 + 2\eta_0 + \frac{2}{3}\eta_0^2.$$

$\eta_0 = 0$ の場合については、定常状態が存在しない事がわかる。それは、(24) 式の両辺に η_ξ をかけ、 ξ について積分すると、部分積分によって次式を得るからである。

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_{\xi\xi})^2 d\xi = 0.$$

これより以下、 $|\eta_0| \ll 1$ を仮定する。(24) に (25) を代入し、 $\eta = \eta_0 u$ で新しい変数 u ($\sim O(1)$) を定義すると、

$$(27) \quad \frac{1}{3} u_{\xi\xi\xi} = \left\{ (2\eta_0 + \frac{2}{3}\eta_0^2) - 2\eta_0 u^2 - \frac{2}{3}\eta_0^2 u^3 \right\} (1+\eta_0 u)^{-3},$$

を得る。これから、 $u_{\xi\xi\xi} \sim O(\eta_0)$ がわかり、変換

$$(28) \quad \zeta = (6\eta_0)^{1/3} \xi$$

により (27) を書きなおすと次式を得る。

$$(29) \quad u_{\zeta\zeta\zeta} = u - u^2.$$

ただし、(29) において $O(\eta_0)$ の項を無視した。境界条件は $\eta_0 > 0$, $\eta_0 < 0$ の場合、それぞれ。

$$(30) \begin{cases} u \rightarrow 0 \quad (\zeta \rightarrow \infty), \quad u \rightarrow 1 \quad (\zeta \rightarrow -\infty), & \dots (\eta_0 > 0), \\ u \rightarrow 1 \quad (\zeta \rightarrow \infty), \quad u \rightarrow 0 \quad (\zeta \rightarrow -\infty), & \dots (\eta_0 < 0). \end{cases}$$

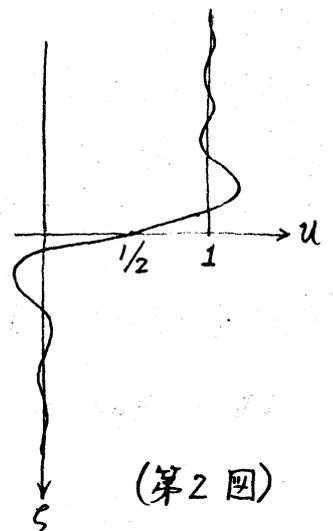
$\eta_0 < 0$ の場合は、(29) の両辺に u_ζ をかけて積分することによって、定常状態が存在しないことがわかる。

$\eta_0 > 0$ の場合について、波の形を求める。 $\zeta \rightarrow \pm\infty$ での漸近解は、 $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ とすると、

$$(31) \begin{cases} u \sim a_1 \exp(\omega \zeta) + a_2 \exp(\omega^2 \zeta), & \dots (\zeta \rightarrow \infty), \\ u \sim 1 + c_1 \exp(-\omega \zeta) + c_2 \exp(-\omega^2 \zeta), & \dots (\zeta \rightarrow -\infty), \end{cases}$$

有限の値の ζ については、テイラー展開の形を仮定し、これを両側の漸近解に接続させると解が求まる。それを第2図に示す。(29) は ζ を陽に含んでいないので、 ζ の原点を自由に選べる。ここでは、 $\zeta=0$ で $u=1/2$ となるようにした。波の形は、 $(0, 1/2)$ について対称である。

このグラフの $\zeta=0$ での勾配は、約 -0.42 である。これから、 u がその値を大きく変える距離 l を評価すると、



(第2図)

$$(32) \quad l \sim \frac{1}{0.42} \left(\frac{R\Gamma}{6\eta_0} \right)^{1/3} \sim \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{a_0^2 \eta_0} \right)^{1/3}.$$

l は、 η_0 の減少関数、 σ の増加関数である。これは、衝撃波の厚さが圧力差の減少関数、粘性率の増加関数であることと似ている。

ここで、(21) を導くときに無視した項を、 $\partial/\partial x \sim l^{-1}$ として評価してみると、慣性項は l^{-1} 、粘性項は $R^{-1}l^{-2}$ である。これらが表面張力項 Γl^{-3} に比べて無視できるためには、

$$(33) \quad R \ll \eta_0^{3/4} g^{3/2}, \quad \text{かつ} \quad R \ll \eta_0^{6/11} g^{3/11},$$

が必要だが、 g が 1000 の程度の大きな数であることを考えると、今考えている小さな R の場合にはこれらの条件は満たされている。

§5. 波の安定性

波は、2 に近い値の位相速度で下に落ちているので、その安定性を調べるには、波に追いつきながら下に移動する座標系に変換するのがよい。変換

$$(34) \quad z = \xi - kt, \quad s = \tau,$$

により、(21) 式は次のようになる。

$$(35) \quad \eta_s = - \left\{ \frac{1}{3} \eta_{zzz} (1+\eta)^3 + \frac{2}{3} (1+\eta)^3 \right\}_z + k \eta_z.$$

一定の位相速度を持たない場合も考えているので、 k の値は、 $z = \pm A$ の間の液体の体積が不変、という条件で決めるのが適当である。ここで、 A は、 $z = \pm A$ で η がほとんど定数であるような数である。この条件

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_{-A}^A \eta dz = \left[(k-2)\eta - 2\eta^2 - \frac{2}{3}\eta^3 \right]_{-A}^A = 0,$$

から、

$$(37) \quad k = 2 + 2\eta_0 + \frac{2}{3}\eta_0^2$$

を得る。

次に、(35)の両辺に η をかけて積分すると、

$$(38) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-A}^A \eta^2 dz = - \frac{1}{3} \int_{-A}^A (\eta_{zzz})^2 (1+\eta)^3 dz + 2 \int_{-A}^A \eta_z^2 (1+\eta) dz - \left[\frac{2-k}{2} \eta^2 + \frac{4}{3} \eta^3 + \frac{1}{2} \eta^4 \right]_{-A}^A.$$

今、 $|\eta| \ll 1$ の場合を考えているので、右辺第2項は第1項に比べて無視しうる。 $\eta(A) \sim 0$, $\eta(-A) \sim \eta_0$ を使うと、第3項は $\eta_0 > 0$ のとき正、 $\eta_0 < 0$ のとき負になることがわかる。第1項は、 η_{zzz} の大小によって値が変わる。従って、 $\eta_0 > 0$ のとき

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_{-A}^A \eta dz = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_{-A}^A \eta^2 dz \begin{cases} < 0 & (\text{波動がはげしいとき}), \\ > 0 & (\text{波動がゆるやかなとき}), \end{cases}$$

$\eta_0 \leq 0$ の場合には、

$$(40) \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_{-A}^A \eta \, dz = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_{-A}^A \eta^2 \, dz < 0.$$

$\int_{-A}^A \eta \, dz$ の値が一定で、 $\int_{-A}^A \eta^2 \, dz$ が増加、減少するときには、波の振幅は増加、減少していると考えられる。従って、(39)、(40) より、 $\eta_0 > 0$ の場合は波はある適当な振幅をもった状態におちつき、 $\eta_0 \leq 0$ の場合は波が減衰して表面が平面に近づくことが結論される。これは、 $\eta_0 > 0$ のときのみに定常状態がある、という前節の結論と一致している。

$\eta(\xi)$ の適当な初期条件について、数値的に各時刻の η を求めていくことが考えられる。それを実際に行なってみると、 $\eta_0 > 0$ の場合は前節で求めた定常解に近付き、 $\eta_0 \leq 0$ の場合は波が減衰していくことがわかり、この節の結論が確かめられた。

References

- 1) H. Jeffrey: Phil. Mag. (b) 49 (1925) 793.
- 2) P.L. Kapitza: J. Exptl. Theoret. Phys. 18 (1948) 20.
- 3) A.M. Binnie: J. Fluid Mech. 2 (1957) 551.
- 4) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 2 (1957) 554.
- 5) C.S. Yie: Phys. Fluids 6 (1963) 321.
- 6) C. Nakaya and R. Takaki: J. Phys. Soc. Japan 23 (1967) 638.
- 7) C.C. Mei: J. Math. and Phys. 45 (1965) 266.