数理解析研究所講究録
第 87 巻 1970 年 1-7

非線型差分方程式の局所的理論について

都立大 理学部　　高野恭一

§1　序

$\vec{y}$をm次元ベクトル，$\vec{f}$をm次元ベクトルで、$|x|$が十分大、$|y|$が十分小で正則、$\vec{f}(\infty,\vec{0})=\vec{0}$とする時 $\vec{y}(x+1)=\vec{f}(x,\vec{y}(x))$ の有界な解の性質については Y. Sibuya, W. A. Harris さんたちによって調べられている。(1) 2) 3) 4))

それは $\vec{f}(x,\vec{y}(x))=\vec{f}_0(x)+A(x)\vec{y}+\sum_{|p|\geq 2} f_p(x)\vec{y}^p$ と展開したとき、$A_0\equiv A(\infty)$ の固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1,\cdots,m}$（但し $\{\lambda_i\}\not\ni 1$）が高々次の三つの分類の二つに分かれる場合である。(i) $|\lambda_i|<1$, (ii) $|\lambda_i|>1$ (iii) $|\lambda_i|=1$ with linear elementary divisors.

むづかしいのは $\{\lambda_i\}\ni 1$ の場合である。S. Tanaka さんはこの場合に特殊解をもとめているが(5)，我々は一般解について知ろうと思う訳で、始めから連立で調べるのは困難なので、単独方程式について調べる。

$y(x-1)=f(x,y(x))$ 、fは$|x|$十分大、$|y|$十分小で正則、

$f(\infty,0)=0$, $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(\infty,0)}=1$ を考える。$f(x,y)=y+ax^{-1}+\sum_{j+k>1}a_{jk}x^{-j}y^{k}$ と展開した時、$a\neq 0$ の場合、$y(x-1)=f(x,y(x))$ の主要部と思われる $y(x-1)=y(x)+ax^{-1}$ の解 $-a\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$ は $-\pi<\arg x<\pi$ で $x\to\infty$ のとき $\sim -a\log(x+1)$ であるので有界な解を求める事は困難と思われる。（但し有界な特殊解はある 9)）。

そこで $a=0$ とするが、後で示す $y=z+\sum P_{jk}x^{-j}z^{k}$ の形の変換をするとき、$f(x,y)=y+x^{-1}\sum_{j+k>0}a_{jk}x^{-j}y^{k}$ でないと、うまくない。

$$\underline{y(x-1)=f(x,y(x))\left(=y(x)+x^{-1}\sum_{j+k>0}a_{jk}x^{-j}y(x)^{k}\right)} \quad \cdots\cdots (1)$$

の有界な一般解を求めることが、この小文の目的である。

(1) は $x(y(x-1)-y(x))=\sum_{j+k>0}a_{jk}x^{-j}y(x)^{k}$ とも書けて、Briot-Bouquet の微分方程式に似ている点に注意しておく。

§2. 形式的理論と解析的理論

定理 I.

「$y(x-1)=y(x)+x^{-1}\sum_{j+k>0}a_{jk}x^{-j}y(x)^{k}$ ……(1) において $a_{01}=\lambda$ とする。

$y=z+\sum_{j+k>1}P_{jk}x^{-j}z^{k}$ なる形の形式的変換を適当に行うと(1)は、次の4つの型の方程式のどれかに帰着される。

(I) $\lambda\neq$ 正の整数, 0, 負の有理数 の場合

$$z(x-1)=(1+\lambda x^{-1})\,z(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

(II) $\lambda=$ 正の整数の場合

$$z(x-1)=(1+\lambda x^{-1})\,z(x)+b\,x^{-\lambda-1} \quad \cdots\cdots ②$$

(III) $\lambda=0$ の場合

$$z(x-1)=z(x)\left(1-mc\,x^{-1}z(x)^{m}-md\,x^{-1}z(x)^{2m}\right)^{-\frac{1}{m}} \quad \cdots\cdots ③$$

(IV) $\lambda=-\frac{\mu}{\nu}$ （μ,ν：正の整数）の場合

$$z(x-1)=z(x)+x^{-1}z(x)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\left(x^{\mu}z(x)^{\nu}\right)^{l}\right) \quad \cdots\cdots ④$$

但し b,c,d は定数，$m>0$ 整数．

④の右辺は形式的級数である ⏌

定理2（定理1で(1)の場合）

『 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ と仮定すると．

$\mathcal{D}=\{(x,z)\in\mathbb{C}^2,\ |x|\geq\frac{1}{\delta},\ |z|\leq\Delta,\ -\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leq\arg x\leq\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$

$-\frac{\pi}{2}+\arg\lambda+\varepsilon\leq\arg x\leq\frac{\pi}{2}+\arg\lambda-\varepsilon,$

δ,Δ は十分小．$\varepsilon>0$ は任意に十分小 $\}$ があり．

$\mathcal{D}$ で正則な $\varphi(x,z)$ で次の性質を満たすものがある。

- $\varphi(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,z^k$（収束）
- $\varphi_k(x)\sim\sum_j P_{jk}x^{-j}$．$x\to\infty$ in $\mathcal{D}_x$．P_{jk} は定理1の係数．
- $p(x)$ を任意の周期1の周期函数とすると

  $\varphi\left(x,\ p(x)\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\lambda+1)}\right)$ は $\mathcal{D}_x$ で(1)の解となる 』

定理3（定理Ⅰで(Ⅱ)の場合）

「定理2と同様のことがいえる。但し$\mathcal{D}$としては

$$\mathcal{D}=\left\{(x,z);\quad |x|\geq\frac{1}{\delta},\ |z|\leq\Delta,\quad |\arg x|\leq\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\}$$

$$\varphi\left(x,\ \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\lambda+1)}\left(\int -b X^{-\lambda-1}\frac{\Gamma(X+\lambda)}{\Gamma(X)}\right)_{X=x-1}+p(x)\right),$$

は(1)の解となる。$p(x)$は周期1の周期関数 」

定理4（定理1でⅢの場合）

「任意の正整数Nに対して、次の性質をもつ$\mathcal{D}$と$\varphi(x,z)$が存在する。$\mathcal{D}=\left\{(x,z)\in\mathbb{C}^2,\quad |x|\geq\frac{1}{\delta},\ |z|\leq\Delta,\ |\arg x|\leq\pi-\varepsilon\right.$

$$\left.|m\arg x-\arg c|\leq\frac{\pi}{2}-2\varepsilon,\right\}.$$

- $\varphi(x,z)$ は$\mathcal{D}$で正則
- $\left|\varphi_N(x,z)-\sum_{N-1\geq j+k>0}p_{jk}x^{-j}z^k\right|=O(|x|^{-N}+|z|^N)$
- $z(x)$ を ③の解とすると $\varphi_N(x,z(x))$は(1)の解。

  もし③において $d=0$ ならば $z(x)$ としては

  $z(x)=\left(mc\dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}+p(x)\right)^{-\frac{1}{m}}$。但し$p(x)$は任意の周期1の周期函数 」

§3. 定理1の証明の概略

$y=z+\sum p_{jk}x^{-j}z^k$ なる変換を

$y=z+\sum_{j+k=n+1}\sigma_{jk}x^{-j}z^k$ なる変換に分解して考える。

(1)のtypeの方程式にこの変換を行うと

$z(x-1) = z(x) + x^{-1}\sum_{j+k>0} b_{jk} x^{-j} z(x)^k$ をえるが

$j+k < n+1$ では $b_{jk} = a_{jk}$,

$j+k = n+1$ では $b_{jk} = a_{jk} - ((k-1)\lambda + j)\rho_{jk} + (k+1)a_{10}\rho_{j-1,k+1}$ 。

若干の細かい注意が必要であるが これより定理1の(I)(II)(IV)はただちにいえる。

(III)については、上の type の変換の外に $y = z + \rho z^{n+1}$ なる変換を交互にくりかえしていけばよい。

§4 定理2, 3, 4の証明の概略.

定理2について考える。3, 4は大体同様である。

微分方程式の専門家には、周知の方法である。

$P_N(x, z) = z + \sum^{N-1} p_{jk} x^{-j} z^k$ とする.

$u = y - P_N(x, z)$ とおいて $u(x, z(x))$ の満足すべき方程式を求める。但し $z(x)$ は①の解.

$$u(x-1) = f(x, u(x) + P_N(x, z(x))) - P_N(x-1, (1+\lambda x^{-1})z(x))$$

$$g_N(x, z, u) \overset{\mathrm{def}}{=} f(x, u + P_N(x, z)) - P_N(x-1, (1+\lambda x^{-1})z) = u + x^{-1}\sum_{j,k,l} b_{jkl} x^{-j} z^k u^l$$

とすると. $u(x, z)$ が $\sum_N^{\infty} p_{jk} x^{-j} z^k$ なる形式解をもつので.

$b_{jk,0} = 0, \ (j+k<N)$ $b_{001} = \lambda$.

$\therefore \ |g(x, z, u)| \leqq |u| + |x|^{-1}(A|u| + B_N(|x|^{-N} + |z|^N))$

$\mathfrak{F}$ を $\mathcal{D}_N$ で正則で $|\varphi(x, z)| \leqq K_N(|x|^{-N} + |z|^N)$ なる函数族とする。$\varphi \in \mathfrak{F}$ に対して $T\varphi = \bar{\varphi}(x, z)$ を

$\bar{\varphi}(x,z) = g(x+1, (1+\lambda(x+1)^{-1})^{-1}z, \varphi(x+1, (1+\lambda(x+1)^{-1})^{-1}z))$ で定義する。$\bar{\varphi} \in \mathcal{F}$ になる様に $\mathcal{D}_N$, $\mathcal{F}$ をきめてやる。

うまくとれれば不動点定理の他の条件は容易に確かめられるので $T\varphi = \varphi$ なる φ が存在し $h_N(x, z(x)) + \varphi(x, z(x))$ ($z(x)$ は①の解) は(1)の解となる。

定理2を示すためには、$O(|x|^{-N}+|z|^N)$ なる上の解の一意性をいう必要がある。二つの解 $\varphi_i(x,z)$, $i=1,2$ に対して、

$\psi_i(x,c) = \varphi_i(x, c\frac{\Gamma(x+\lambda)}{\Gamma(x+\lambda+1)})$ とする。$\mathcal{D}_x$ で $x \to \infty$ としたとき $c\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\lambda+1)} \sim c\,x^{-\lambda}$ である。

$\min(1, \mathrm{Re}\,\lambda) = \sigma$ とすると $|\psi_i(x)| = O(|x|^{-N\sigma})$ で、$|w(x)| \equiv |x|^{N\sigma}|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqq k$。$\psi_i(x) = g(x+1, c\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+\lambda+2)}, \psi_i(x+1))$ より

$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqq (1+\alpha|x|^{-1})|\psi_1(x+1) - \psi_2(x+1)|$。

$x = x_1 + ix_2$ とすると $|x_1| \geqq |x||\sin\eta|$, $0<\eta<\frac{\pi}{2}$。

$$|w(x)| \leqq |x|^{N\sigma}|\psi_1(x)-\psi_2(x)| \leqq |x|^{N\sigma}|x+1|^{-N\sigma}(1+\alpha|x|^{-1})|w(x+1)| \leqq (1-\beta|x|^{-1})|w(x+1)|$$

$$\leqq (1-\gamma|x_1|^{-1})|w(x+1)| \leqq \cdots \leqq \frac{\Gamma(|x_1|)}{\Gamma(|x_1|-\gamma)}\frac{\Gamma(|x_1|+n-\gamma)}{\Gamma(|x_1|+n)}k。$$

$\gamma = \beta|\sin\eta| > 0$. $\therefore$ $|w(x)| = 0$.

$\therefore$ $\psi_1(x,c) = \psi_2(x,c)$ $\therefore$ $\varphi_1(x,z) = \varphi_2(x,z)$.

存在と一意性がいえれば定理2は簡単に証明できる。

定理3、4についても同様。

§4 結び

形式的理論は (IV) λ＝負の有理数の場合がまだ出来ていない。解析的理論で(I)で $\mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0$ の時、うまくないのは、$|\varphi(x,z)| \leqq K_N(|x|^{-N}+|z|^N)$ なる様に $\mathfrak{D}_N$ をきめると、$\varphi(x,z)$ の定義域や $\mathfrak{D}_N$ となるからである。定理4で $\mathfrak{D}$, φ が N に依存するのは、定理2でやった一意性がまだいえてないからである。

参考文献（若干）

1) W.A Harris and Y.Shibuya; Asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations. (Arch. for Rat. Nech. & Analysis, 15(1964) 377-395)

2) ____ ; Note on linear difference equations (Bull. Amer. Math. Soc. 70(1964) 123-127)

3) ____ ; General solutions of monlinear difference equations (Trans. Amer. Math. Soci. 115(1965) 62-75

4) ____ , On asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations, J. Reine Angew. Math. 222(1966) 120-135

5) J. Horn ; Zur Teorie der nichtlinearen Differential-und Differenzengleichungen (J. für reine u. angew. Math. 141 (1912) 182-216)

6) ____ , Laplacesche-Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen (__________,146(1916) 95-115)

7) ____ , Über eine nichtlineare Differenzengleichungen (Jahresb. deutsch. Math. Ver. 26(1918) 23-251)

8) S. Tanaka; On asymptotic solutions of non-linear difference equations I II III Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.(A), 7(1953) 107-127, 10(1956) 45-83, 11(1957) 167-184.