数理解析研究所講究録
第 88 巻 1970 年 45-65



# 補間空間の理論と応用の若干

東大 理　吉川 敦

## §0. はじめに

この話においては，二つのBanach空間の実補間空間の理論の概略を説明し，その応用としていくつかの埋込み定理を取扱ってみたい。まず本質的な内容をつぎの簡単な例によって示そう。

$B_p^{s,r}(\mathbb{R})$, $1\leq p\leq\infty$, $1\leq r\leq\infty$, $s>0$, によって，$L^p(\mathbb{R})$の意味で$[s]$階微分可能（$[s]$はsより小さい，最大自然数）な函数$f$であって，かつ，$(\frac{d}{dx})^{[s]}f(x)$が

$$\Big[\int_0^{+\infty} t^{-(s-[s])r-1}\Big\{\int_{\mathbb{R}} \Big|\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{[s]}f(x)-\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{[s]}f(x+t)\Big|^p dx\Big\}^{\frac{r}{p}}dt\Big]^{\frac{1}{r}}<\infty$$

をみたすようなfの全体からなるBanach空間をあらわそう。（sが整数のとき，およびpまたは$r=\infty$のときやや修正を要する）。このとき，つぎの埋込み関係が知られている：

(0,1)　$B_p^{s,r}(\mathbb{R})\subsetneq B_q^{t,r}(\mathbb{R})$, $1\leq r\leq\infty$, $t=s-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>0$, $s>0$, $1\leq p<q\leq\infty$.

これは，たとえばNikol'skiiの著書[6]に見るように，整函数近

似の理論に基いて導くことができる。しかし，われわれは，そのような立場をとらずに，空間$B_p^{s,r}(\mathbb{R})$が実補間空間の理論によって得られることに着目して出発する。詳しくは以下に述べること，または引用文献[2][4][5][10]によるべきであるが$B_p^{s,r}(\mathbb{R})$は実補間空間として，$L^p(\mathbb{R})$と$L^p(\mathbb{R})$に定義された平行移動(半)群の生成作用素$A_p=\frac{d}{dx}$の$m$乗($m>s$)の定義域$D(A_p{}^m)$の間の平均空間

$$(0,2) \qquad B_p^{s,r}(\mathbb{R}) = (L^p(\mathbb{R}), D(A_p{}^m))_{\frac{s}{m},r}$$

として得られる。一方，平行移動(半)群の生成作用素のレゾルヴェントについては

$$(\lambda-A)^{-1}f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+t)\,dt, \qquad \lambda>0,$$

に基いて，簡単な計算により，$(\lambda-A)^{-1}$は$L^p(\mathbb{R})$から$L^q(\mathbb{R})$，$p<q$，への有界作用素であって，かつ，ノルムは

$$(0,3) \qquad \|(\lambda-A)^{-1}\|_{L_p\to L_q} \leqq L\lambda^{\sigma-1}, \quad \lambda>0,$$

$\sigma=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$，$L=(1-\sigma)^{1-\sigma}$，をみたすことがわかる。

さて，(0,2)において本質的なのは$A_p$が半群の生成作用素であるということであって，これと(0,3)型の評価を合せれば，(0,2)型の定義で得られる補間空間の間に(0,1)型の埋込み関係が成立することを述べるのが，この話の内容といえる。

一方，たとえば，$L^p(\mathbb{R})$における Gauss 核：

$$G(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y)\,dy, \qquad t>0,$$

を考えてみると, $G(t)$ は $L^p(\mathbb{R})$ から $L^q(\mathbb{R})$, $p<q$, への有界作用素になっていて, そのノルムは

$$(0,4)\qquad \|G(t)\|_{L^p\to L^q} \leqq c\,t^{-\sigma},\quad t>0,\ \sigma>0,$$

$\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, $c=(2\pi)^{-\sigma}(1-\sigma)^{\frac{1}{2}-\sigma}$, をみたしていることがわかる。(0,4) 型の評価から (0,3) 型の評価を得ることができるのでこの場合にも $L^p(R)$ と $G(t)$ の生成作用素 $A_p=-\frac{d^2}{dx^2}$ の $m$ 巾の定義域 $D(A_p^m)$ との平均空間を考えれば, これらの間にも埋込み関係が成立する:

$$(0,2')\qquad \Lambda(s,p,r;R)=\left(L^p(R),D(A_p^m)\right)_{\frac{s}{2m},r},\quad s>0,\ 1\leq p,r\leq\infty,\ s<2m$$

$$(0,1')\qquad \Lambda(s,p,r;R)\subsetneq\Lambda\left(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{q},q,r;R\right),\quad 1\leq p<q\leq\infty.$$

この空間 $\Lambda(s,p,r;R)$ は Taibleson [8] によって取扱われた Lipschitz 空間である。

なお, 上の場合 $G(t)$ は解析的半群であったが (0,4) 型の評価は $G(t)$ が解析的でなくても成立する。たとえば

$$(0,5)\qquad G(t)f(x)=e^{itx^4-tx^2}f(x),\quad t\geqq 0,$$

を考えれば

$$(0,4')\qquad \|G(t)f(x)\|_{L^p(R)} \leqq (\pi\sigma)^{\frac{\sigma}{2}}t^{-\frac{\sigma}{2}}\|f(x)\|_{L^q(R)},\quad \sigma=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ p<q$$

がわかる。(0,5) のような半群は, 牛島氏 [9] によって取扱われている。

もちろん, われわれの立場に立てば (0,3) または (0,4) 型の評価が得られればよいので, 境界条件が付いていてもかまわな

い。例として後に半空間における $-\Delta$ に Dirichlet 条件または Neumann 条件の付いた場合を考察しよう。この場合には，$L^p$ における $-\Delta$ の実現の分数巾の定義域と $L^q$ における分数巾の定義域の間の埋込み関係を得ることもできる。

## §1. 実補間空間の理論

1.1. $E, F$ を二つの Banach 空間とする。分離公理をみたす線型位相空間 $\mathcal{E}$ があって，$E \subseteq \mathcal{E}$, $F \subseteq \mathcal{E}$ がなりたつとする(1)。このとき Lions-Peetre 両氏[5] に従って，$E, F$ の平均空間

(1.1) $$S(r,\theta,E;r,\theta-1,F) = \underline{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F) = (E,F)_{\theta,r},\quad 0<\theta<1,\ 1\le r\le\infty,$$

をつぎのように定義することができる。定義をする前に必要な記号を導入する：$X$ を Banach 空間とするとき $L^r_*(X)$, $1\le r\le\infty$, をもって正実軸 $\mathbb{R}^+$ で定義され値を $X$ にとる強可測な函数 $f(t)$ でつぎの条件(1.2)をみたすものの全体からなる Banach 空間をあらわそう：

(1.2) $$\begin{cases} \left[\int_0^\infty \|f(t)\|_X^r \dfrac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}} < \infty, & 1\le r<\infty, \\ \sup\limits_{t>0} \|f(t)\|_X < \infty, & r=\infty \end{cases}$$

<u>空間 $S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ の定義.</u> $u(t)$ を $\mathcal{E}$ に値をとる函数で

(1.3) $$t^\theta u(t) \in L^r_*(E), \qquad t^{\theta-1}u(t)\in L^r_*(F)$$

---

(1) 二つの位相空間 $X, Y$ について，$X \subseteq Y$ と書くときは，$X$ が $Y$ に集合として含まれ，かつ $X \ni x \mapsto x \in Y$ が連続であることを意味する。

をみたすものとする。このとき

(1.4) $$a=\int_0^{\infty} u(t)\frac{dt}{t}$$

の張る空間を $S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ であらわす。これは，ノルム

(1.5) $$\|a\|_{S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)}=\inf\left\{\max \|t^{\theta}u(t)\|_{L_*^r(E)},\ \|t^{\theta-1}u(t)\|_{L_*^r(F)}\right\}$$

によってBanach空間になる。ただし，infは(1.3)(1.4)をみたす$u(t)$全体に対してとる。

<u>空間 $\underset{\sim}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ の定義</u> $v(t)$, $w(t)$ を $\mathcal{E}$ に値をとる函数で

(1.6) $$t^{\theta}v(t)\in L_*^r(E),\qquad t^{\theta-1}w(t)\in L_*^r(F)$$

をみたすものとする。このとき

(1.7) $$a=v(t)+w(t),\qquad a.e.\ t>0$$

の張る空間を $\underset{\sim}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$ であらわす。これはノルム

(1.8) $$\|a\|_{\underset{\sim}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)}=\inf\max\left\{\|t^{\theta}v(t)\|_{L_*^r(E)},\ \|t^{\theta-1}w(t)\|_{L_*^r(F)}\right\}$$

によってBanach空間になる。ただし infは(1.7)が成立するような$v$, $w$で(1.6)をみたすものの全体に対してとる。

<u>命題1.1</u> $1\leq r\leq\infty$, $0<\theta<1$ に対し，Banach空間として

(1.1) $$S(r,\theta,E;r,\theta-1,F)=\underset{\sim}{S}(r,\theta,E;r,\theta-1,F)$$

がなりたつ。この空間を，以下，$(E,F)_{\theta,r}$ とあらわし，$E,F$ の平均空間という。

<u>注意1.1</u> 上記の定義は各$n$個のBanach空間の場合に拡張することもできる。しかし，その場合命題1.1にあたることは，$n\geqq3$のときは一般には成立しない。

注意1.2. 平均空間と同値な空間を与えるものにLions氏のトレース空間というのがある。これはつぎの定義から明らかなように境界値の集合であるので，境界値問題を考える際には，この定義に基いた方がわかりやすい。

トレース空間 $T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)$，$1\leq r\leq\infty$，$0<\theta<1$，の定義：$u(t)$ を $\mathcal{E}$ に値をとる $R^+$ で定義された函数で

(1.9) $$t^\theta u(t)\in L^r_*(E),\qquad t^\theta\frac{d}{dt}u(t)\in L^r_*(F)$$

をみたすものとする。このとき

(1.10) $$a=u(0)$$

の張る空間を $T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)$ であらわす。これはノルム

$$\|a\|_{T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)}=\inf\max\left\{\|t^\theta u(t)\|_{L^r_*(E)},\ \|t^\theta\frac{d}{dt}u(t)\|_{L^r_*(F)}\right\}$$

によってBanach空間になる。ただし inf は (1.9) (1.10) をみたす $u$ 全体に対してとる。Banach空間として

(1.11) $$T(r,\theta-\frac{1}{r},E;r,\theta-\frac{1}{r},F)=(E,F)_{\theta,r}$$

がいえる。

1.2. 後に必要になる平均空間の性質を以下に述べる。

命題1.2. Banach空間 $E,F,E_1,F_1$ を考える。分離公理をみたす線型位相空間 $\mathcal{E},\mathcal{E}_1$ があって，$E,F\subseteq\mathcal{E}$，$E_1,F_1\subseteq\mathcal{E}_1$ をみたしているとしよう。$L$ を $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}_1$ への線型作用素とする。$L$ が $E$ から $E_1$，$F$ から $F_1$ へのそれぞれノルム $A$，$B$ の有界作用素であるならば，$L$ は $(E,F)_{\theta,r}$ から $(E_1,F_1)_{\theta,r}$ への有界作用素であって

そのノルムは const. $A^{1-\theta}B^{\theta}$ である。

命題1.3. $1 \leq r \leq r_1 \leq \infty$ ならば、

$$(E,F)_{\theta,r} \subseteq (E,F)_{\theta,r_1}, \quad 0<\theta<1$$

が成立する。

命題1.4. つぎのことがなりたつ：

$$(E,F)_{\lambda,r} = ((E,F)_{\theta_0,r}, (E,F)_{\theta_1,r})_{\theta,r}, \quad \lambda=(1-\theta_0)\theta+\theta_1\theta, \ 0<\theta<1,$$

$0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$. ただし $(E,F)_{0,r}=E$, $(E,F)_{1,r}=F$ とする。

命題1.5. $E \subseteq F$ ならば

$$(E,F)_{\theta_0,r} \subseteq (E,F)_{\theta_1,r}, \quad 0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$$

である。

注意1.3 命題1.4, 1.5 は $(E,F)_{\theta_i,r}$ の代りに

$$(E,F)_{\theta_i,1} \subseteq X_i \subseteq (E,F)_{\theta_i,\infty}, \quad i=0,1$$

をみたす Banach 空間 $X_i$ に対しても成立する。

## §2 ある種の閉作用素と平均空間

$E$ を Banach 空間とする。$A$ を $E$ で定義された閉作用素でつぎの条件をみたすものとする。すなわち $A$ は non-negative：

(2.1) $\lambda>0$ は $-A$ のレゾルヴェント集合に入り

$$\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| \leq M$$

がなりたつ。ただし、$M$ は定数。さらに $A$ の定義域 $D(A)$ は $E$ において稠密であるとしよう。たとえば、$G(t)$, $t \geq 0$, を $E$ にお

ける有界作用素の$(C_0)$-半群とし，その生成作用素を$-A$とすれば，$A$はnon-negativeである。

ある自然数$m$に対し$A$の$m$巾を$A^m$，その定義域を$D(A^m)$と書く。このとき，以下のことがらがなりたつ。

命題2.1. 空間$(E, D(A^m))_{\theta, r}$, $0<\theta<1$, $1 \leq r \leq \infty$, は

$$t^{\theta m}(A(t+A)^{-1})^m x \in L^r_*(E)$$

をみたす$x \in E$の全体であって，そのノルムは

$$\|x\|_{(E, D(A^m))_{\theta, r}} = \|x\|_E + \|t^{\theta m}(A(t+A)^{-1})^m x\|_{L^r_*(E)}$$

である。

注意2.1

$$(2.2) \qquad u(t) = c_m\ t^m A^m (t+A)^{-2m} x, \quad t>0, \quad c_m = \Gamma(2m)/\Gamma(m)^2$$

とおく。このとき

$$(2.3) \qquad t^{m\theta} u(t) \in L^r_*(E), \qquad t^{m\theta - m} u(t) \in L^r_*(D(A^m))$$

$$(2.4) \qquad x = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

がなりたち，さらに，Grisvard氏によれば

$$(2.5) \qquad \max\{\|t^{m\theta} u(t)\|_{L^r_*(E)}, \|t^{m\theta-m} u(t)\|_{L^r_*(D(A^m))}\} \leq C\|x\|_{(E, D(A^m))_{\theta, r}}$$

が成立する。

命題2.2. $m, n > 0$を自然数，$0<\theta, \varphi<1$とする。$m\theta = n\varphi$ならば，

$$(2.6) \qquad (E, D(A^m))_{\theta, r} = (E, D(A^n))_{\varphi, r}$$

がなりたつ。

<u>命題2.3.</u> $m, n > 0$ を自然数とする。$0 < \theta - \frac{n}{m} < \theta < 1$ とI よう。このとき，つぎの二条件(2.7), (2.8) は同値である。

(2.7) $\quad x \in (E, D(A^m))_{\theta, r}$

(2.8) $\quad x \in D(A^n)$ かつ $A^n x \in (E, D(A^m))_{\theta - \frac{n}{m}, r}$.

<u>注意2.2.</u> 命題2.2, 2.3における $m, n > 0$ は実数でよい。

とくに，$-A$ が $(C_0)$ 半群 $G(t)$, $t \geqq 0$, の生成作用素であるときには，つぎの命題がなりたつ。

<u>命題2.4</u> 空間 $(E, D(A^m))_{\theta, r}$ は

(2.9) $\quad t^{-m\theta}(I - G(t))^m x \in L_*^r(E)$

をみたす，すべての $x \in E$ からなるBanach空間である。そのノルムは

$$\|x\|_E + \| t^{-m\theta}(I - G(t))^m x \|_{L_*^r(E)}$$

でちえられる。

<u>命題2.5.</u> $G(t)$ がとくに解析的半群とする。このとき $(E, D(A^m))_{\theta, r}$

(2.10) $\quad t^{m - m\theta} A^m G(t) x \in L_*^r(E)$

をみたす，すべての $x \in E$ からなるBanach空間である。ノルムは，

$$\|x\|_E + \| t^{m - m\theta} A^m G(t) x \|_{L_*^r(E)}$$

でちえられる。

<u>注意2.3</u> 命題2.5において，$m$ は正の実数でよい。

論理的な順序はやや狂うが，$\alpha > 0$ に対し，つぎのことがな

りたつ。

<u>命題2.6</u>　$m>\alpha$ とする。

$$(E, D(A^m))_{\frac{\alpha}{m},1} \subsetneq D(A^\alpha) \subsetneq (E, D(A^m))_{\frac{\alpha}{m},\infty}.$$

## §3　埋込み定理

$E, F, \mathcal{E}$ を §1 のようにとる。$A$ を $\mathcal{E}$ の連続な線型作用素で $\lambda+A$, $\lambda>0$, が一対一であるとしよう。さらに，$A$ を $E$ に制限した作用素を $A_E$ とする。すなわち

(3.1)　$D(A_E) = \{x\in E;\ Ax\in E\}.$

$$A_E x = Ax, \qquad x\in D(A_E)$$

$A_F$ についても同様。$A_E$, $A_F$ は明らかに閉作用素である。つぎの仮定をおく；

(3.2)　$A_E$, $A_F$ は non-negative,

$D(A_E)$, $D(A_F)$ はそれぞれ $E$, $F$ において稠密.

したがって §2 に基いて $(E, D(A_E^m))_{\theta,r}$, $(F, D(A_F^m))_{\theta,r}$ を計算できる。このとき，Grisvard 氏によれば，

<u>命題3.1</u>　Banach空間として，

$$((E, D(A_E^m))_{\theta,r}, (F, D(A_F^m))_{\theta,r})_{t,r} = (X, D(A_X^m))_{\theta,r}$$

ただし，$0<\theta<1$, $1\le r\le\infty$, $0<t<1$, $X=(E,F)_{t,r}$, $A_X$ は $A$ を $X$ に制限した作用素である。

<u>定義3.1</u>　$A\in(\sigma, E, F)$, $\sigma>0$, とは $\lambda>0$ に対し，$(\lambda+A)^{-1}$ が

EからFの作用素として有界であって，かつ

(3.3) $\qquad \|(\lambda+A)^{-1}\|_{E\to F} \leq L\lambda^{\sigma-1}, \qquad L$：定数$>0$，

がなりたつ作用素Aをいう。

また，別な場合として，$G(t)$, $t\geq 0$, が$\mathcal{E}$における作用素の半群とし，$G(t)$をE，Fに制限した作用素族$G_E(t)$, $G_F(t)$が，それぞれ，E，Fにおける$(C_0)$半群になっている場合を考えよう。

<u>定義3.2</u> $G(t)\in S(\sigma,E,F)$, $\sigma>0$, とは $t>0$に対し，$G(t)$がEからFの作用素として有界で，かつ

(3.4) $\qquad \|G(t)\|_{E\to F} \leq Kt^{-\sigma}, \qquad K>0,$

がなりたつ$G(t)$をいう。

命題1.2および命題3.1によってE，Fの間に空間の鎖$(E,F)_{\theta_i,r_i}$
$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{N-1}<\theta_N=1$, $1\leq r_i\leq\infty$, を，はめこんで考えればよいので，以下の議論で，定義3.1，3.2の$\sigma$を

(3.5) $\qquad 0<\sigma<1$

と仮定して差支えない。このとき，つぎのことがいえる。

<u>命題3.2</u> $G(t)$の生成作用素を$-A$とする。$G(t)\in S(\sigma,E,F)$ならば $A\in(\sigma,E,F)$である。

<u>命題3.3</u> $A\in(\sigma,E,F)$とする。このとき，つぎの埋込み定理がなりたつ。ただし，$0<\theta<\theta+\frac{\sigma}{m}<1$, $1\leq r\leq\infty$：

$$(E,D(A_E^m))_{\theta+\frac{\sigma}{m},r} \subsetneq (F,D(A_F^m))_{\theta,r}.$$

## §4　命題3.2 および3.2の証明

これらの証明では，必要に応じて補間定理を用いればよいから，$0<\sigma<1$ としておいて，一般性を失わない。

命題3.2は，次の公式から直ちに従う：

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\,dt, \quad \lambda > 0.$$

命題3.3を証明する。$a \in (E, D(A_E^m))_{\theta+\frac{\sigma}{m}, r}$ とする。

$$u_k(t) = \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2} t^k A_E^k (t + A_E)^{-2k} a$$

$$= \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2} t^k A^k (t + A)^{-2k} a$$

とおく。ただし，$k \geqq m$，$t>0$。命題2.1および注意2.1より

$$(4.1) \quad \begin{cases} t^{m\theta+\sigma} u_k(t) \in L_*^r(E) \\ t^{m\theta+\sigma-k} A^k u_k(t) \in L_*^r(E) \end{cases}$$

$$(4.2) \quad a = \int_0^\infty u_k(t) \frac{dt}{t}$$

である。一方，仮定から，

$$\| u_{m+1}(t) \|_F \leqq \text{const.}\ t^\sigma \| u_m(t) \|_E$$

$$\| A^m u_{m+1}(t) \|_F \leqq \text{const.}\ t^\sigma \| A^m u_m(t) \|_E$$

であるから，(4.1)より

$$(4.3) \quad \begin{cases} t^{m\theta} u_{m+1}(t) \in L_*^r(F) \\ t^{m\theta-m} A^m u_{m+1} \in L_*^r(F) \end{cases}$$

それゆえ，$b = \int_0^\infty u_{m+1}(t) \frac{dt}{t}$ は $F$ で収束して，$b \in (F, D(A_F^m))_{\frac{\theta}{m}, r}$.

しかるに，$\mathcal{E}$ では $a = b$ であるから，$a \in (F, D(A_F^m))_{\theta/m, r}$.

閉グラフ定理から

$$\|a\|_{(F, D(A_F^m))_{\frac{\theta}{m}, r}} \leq \text{Const.}\ \|a\|_{(E, D(A_E^m))_{\frac{\theta}{m}+\sigma, r}}.$$

## §5. 分数巾の定義域と埋込み関係

<u>定義5.1.</u> $A^{-1}, A_E^{-1}, A_F^{-1}$ は有界とする。$A \in \Sigma(\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とは、$A_E, A_F$ が non-negative であって、かつ、$A^{-\sigma}$ が $E$ から $F$ への作用素として有界であることをいう。

<u>命題5.1.</u> $-A$ は $(C_0)$ 半群 $G(t)$ の生成作用素とする。$G(t)$ が解析的であるときは、$A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ である。

実際 $G(t) = A^{-\sigma}A^{\sigma}G(t) = A^{\sigma}G(t)A^{-\sigma}$ であるから

$$\|G(t)\|_{E\to F} \leq \|A^{\sigma}G(t)\|_{F\to F}\ \|A^{-\sigma}\|_{E\to F} \leq \text{Const}\ t^{-\sigma}$$

が得られる。

<u>命題5.2.</u> $0 < \sigma < 1$ とする。次の三条件は同値である：

(5.1) $D(A_E) \subset D(A_F^{1-\sigma})$ ;

(5.2) $D(A_E^{\alpha+\sigma}) \subset D(A_F^{\alpha})$ , $\forall \alpha > 0$;

(5.3) $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$

証明には、分数巾の定義（小松[4]）と、命題5.1. 命題3.3, 命題2.6 を用いれば、容易である。

命題5.1の逆は一般に成立せず、反例としては、

$$(G(t)f)(x) = e^{-t(1+x^2)}f(x), \quad f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 < p < \infty$$

がある。実際，これは，解析的半群を各$L^p(\mathbb{R})$でなし，

$$G(t) \in S\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right), \quad 1 \leq p < q < \infty$$

をみたすが，その生成作用素$-A$については，

$$A \in \Sigma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)$$

は，$p, q$，$1 \leq p < q < \infty$，をどう選んでも成立しない。

二，三の特別な場合を考察する。

<u>命題5.3.</u> $F \subset E$とする。$A^{-1}$が$E$から$F$の作用素として有界であるための必要十分条件は，$D(A_E) \subset F$である。

これを用いると，函数論的補間空間（Calderon [12]）より，

<u>命題5.4.</u> $F \subset E$とする。もし，あるBanach空間$X$があって$D(A_E) \subset X$　かつ　$F = [E, X]_\theta$がある$\theta \in ]0,1[$に対して成立するとする。このとき，$[E, D(A_E)]_\theta \subset F$である。ただし$[Y, Z]_\theta$は，Banach空間$Y$と$Z$の函数論的な補間空間をあらわす。すなわち，$0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$で定義され，値を$Y + Z$にとる連続函数$f(z)$で，$0 < \mathrm{Re}\, z < 1$において正則，かつ，

$$\|f(iy)\|_Y, \quad \|f(1+iy)\|_Z \qquad (y \in \mathbb{R}) \to 0, \ |y| \to \infty,$$

をみたすものの全体を$\mathcal{H}$とおくとき，

$$[Y, Z]_\theta = \{f(\theta);\ f \in \mathcal{H}\}$$

である。ノルムは，

$$\|a\|_{[Y,Z]_\theta} = \inf_{\substack{f(\theta)=a \\ f \in \mathcal{H}}} \left\{\max\left[\sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(iy)\|_Y, \sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(1+iy)\|_Z\right]\right\}$$

で与えられる。

これより，

<u>命題5.5</u>　命題5.4と同じ仮定のもとで考える。もし，$[E, D(A_E)]_\theta = D(A_E{}^\theta)$ ならば，$A \in \Sigma(\theta, E, F)$ である。

分数巾の定義域が上記の場合のように与えられるためには

$$\|A^{ik}\| \leq \mathrm{Const}\ e^{\omega|k|},\quad k \in \mathbb{R},\quad \omega = \text{定数}$$

が成立すればよい。これについては，藤原氏，高倉氏の研究がある他，$E$ が Hilbert 空間，$A$ が自己共役の場合には，明らかである。

第二の特別な場合として，つぎのような場合を考える。$E$，$F$ を今までのような Banach 空間とし，さらに，$E_1$，$F_1$ という Banach 空間と，$E_1, F_1 \subsetneq \mathcal{E}_1$ なる分離公理をみたす線型位相空間が存在するとしよう。$\mathcal{E}_1$ から $\mathcal{E}$，および $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}_1$ への線型写像 $L$，$R$ がそれぞれ存在して，これらが，

$$E_1 \xrightarrow{L} E \xrightarrow{R} E_1,$$
$$F_1 \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} F_1,$$

の写像として連続であり，かつ，$RL = 1$ を満足するとしよう。$P = LR$ とおけば，$P$ は，$E \to E$，$F \to F$ の写像として有界であって，$P^2 = P$ をみたすことがわかる。

<u>命題5.6.</u>　$\lambda > 0$ に対し，$(\lambda + A_E)^{-1} P = P(\lambda + A_E)^{-1}$，$(\lambda + A_F)^{-1} P = P(\lambda + A_F)^{-1}$ とする。このとき，$A \in \ (\sigma, \mathring{E}, F)$ ならば，$RAL \in \ (\sigma, E_1, F_1)$，$G(t) \in S(\sigma, E, F)$ ならば

$RG(t)L \in S(\sigma, E_1, F_1)$, また, $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $RAL \in \Sigma(\sigma, E_1, F_1)$ である。

## §6 例

例6.1. $L^p(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R})$ における平行移動(半)群の生成作用素を $-A$ とする。このとき,

(6.1) $\quad A \in (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R})), \quad 1 \leq p < q < \infty,$

(6.2) $\quad A \in (\frac{1}{p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R})), \quad 1 \leq p < \infty$

がなりたつ。

証明は, 本質的には Hausdorff-Young の不等式を用いればよい。

例6.2. $L^p(\mathbb{R}^n)$, $C(\mathbb{R}^n)$ における Gauss 核から得られる半群を $G(t)$ とする:

$$(G(t)f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}^{\,n}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y)\,dy, & t > 0 \\ f(x), & t = 0. \end{cases}$$

このとき,

(6.3) $\quad G(t) \in S(\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)), \quad 1 \leq p < q < \infty.$

(6.4) $\quad G(t) \in S(\frac{n}{2p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R}^n)), \quad 1 \leq p < \infty,$

(6.5) $\quad 1-\Delta \in \Sigma(\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)), \quad 1 < p < q < \infty$

がなりたつ。

(6.5) は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式([3], [7]) から, 直

ちに従う。

例6.3. $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ における $-\Delta$ の Dirichlet 条件または Neumann 条件のもとでの実現を $-A$ とする。このとき，

(6.6) $\quad 1+A \in \Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n_+), L^q(\mathbb{R}^n_+)\right)$, $1<p<q<\infty$

がなりたつ。

(6.5)と命題5.6を用いればよい。Dirichlet条件の場合には $E_1=L^p(\mathbb{R}^n_+)$, $F_1=L^q(\mathbb{R}^n_+)$, $E=L^p(\mathbb{R}^n)$, $F=L^q(\mathbb{R}^n)$ として，

$$(Lf)(x)=\begin{cases} f(x) & x_n>0 \\ -f(x',-x_n) & x_n<0,\quad x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}) \end{cases} \qquad f\in E_1 \ (\text{または}\ F_1)$$

$$(Rg)(x)=\frac{1}{2}\left[g(x',x_n)-g(x',-x_n)\right]\Big|_{\mathbb{R}^n_+},\quad g\in E\ (\text{または}\ F)$$

とればよい。Neumann 条件の場合には，偶函数に拡張する。これは藤原氏の技巧である。

例6.4. $A$を2階の楕円型作用素とする。$C^\infty$係数とし，主要部の係数は実数値とする。$\Omega$を$\mathbb{R}^n$の有界領域とし境界は滑らかとする。$L^p(\Omega)$に作用素$A_p$を，

$$A_p u = Au,\quad u\in D(A_p)$$
$$D(A_p)=\{u;\ u\in W^{2,p}(\Omega),\ Bu|_{\partial\Omega}=0\}$$

ただし，$Bu=u$ または $Bu=\frac{\partial}{\partial n}u$ ($n$: 外法線) とする。このとき $A_2$が accretive になるとしてよく，

(6.7) $\quad A\in \Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right)$, $1<p<q<\infty$

がなりたつ。

これは、上記の場合$A$の純虚数巾が有界になることが知られているからである(藤原(c))。

<u>例6.4.</u> $A$を$2m$階の楕円型作用素とする。$\Omega$を$R^n$の有界領域、$\partial\Omega$は$\Omega$の境界で滑らかとする。$A$の係数は$\bar{\Omega}$で滑らかとしよう。$B_1, \cdots, B_m$を境界作用素とする。作用素$A_p$を$L^p(\Omega)$に、つぎのように定義する:

$$A_p u = Au, \quad u \in D(A_p)$$

$$D(A_p) = \{u \in W^{p,2m}(\Omega);\ B_j u|_{\partial\Omega} = 0 \quad j = 1, \cdots, m\}$$

もし$A_2$が正定値な自己共役作用素であれば、

(6.8) $\quad A \in \Sigma\left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1 < p \leq 2 \leq q < \infty$

がなりたち、したがって

(6.9) $\quad A \in \left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1 < p < q < \infty$

がなりたつ。

証明は命題5.5と、補間定理による。(6.8)が$p \leq 2 \leq q$の制限なしに成立するかどうかについては、筆者は、まだ、何ともいえない。

## § ∞ 文献.

1. Fujiwara Daisuke (a) Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc Japan Acad 43 (1967) 82-86.; (b) $L^p$ theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1. 15 (1968), 169-177

2. Grisvard, Pierre, 学位論文, パリ大学, 1965.

3. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press.

4. Komatsu Hikosaburo (a) Fractional powers of operators, Pacific J. Math. 19 (1966), 285-346, (b) Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, ibidem. 21 (1967), 89-111, (c) Fractional powers of operators, III, Negative powers, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969) 205-220, (d) Fractional powers of operators, IV, potential operators, ibidem. 21 (1969) 221-228.

5. Lions & Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Pub. Math. I.H.E.S. 19 (1964), 5-68.

6. Nikol'skiĭ, S. M., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Изд. Наука, モスクワ, 1969.

7. Sobolev, S. L., Об одной теореме функциального анализа, Мат. сб. 4 (46), 1938, 471-497.

8. Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions

on Euclidean $n$-space I, Principal properties. J. MATH. MECH. 13 (1964), 407-479.

9. Ushijima Teruo, 線型作用素の半群の滑らかさについて, 発展系の数値解法予稿, 京大数解研, 1969.

10. YOSHIKAWA, A. Remarks on the theory of interpolation spaces, J. FAC. SCI. UNIV. TOKYO, SEC. 1, 15 (1968), 209-251.

11. YOSIDA, KÔSAKU, Functional Analysis, Springer-V., 1965.

§ ∞+1 文献追加


1 bis Fujiwara, D. (c) On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and pure imaginary powers of some second order operators, J. Math. Soc. JAPAN, 21, (1969), p. 481-522.

12. Calderón, A.P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., 24 (1964), 113-190.

13. Shimakura, Norio, (a) Problèmes aux limites variationnels du type elliptique, Ann. E.N.S., Ser. 4, 2, (1969), 255-310,
(b) 東京大学理学部数学教室，解析火曜セミナー講演，1969年12月9日.

14. Agmon, Shmuel, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 119-147.