数理解析研究所講究録
第94巻 1970年 24-43



# Cotriple cohomology について

京大 数理研 島田信夫

古典的なホモロジー代数(Cartan - Eilenberg [5])の拡張として,一方では projective (injective) object の概念が一般化され(relative homological algebra [7],[11]),他方では単体的 resolution を用いて任意の函手(ただし値域は abelian)の derived functors を定義する方法が導入された(Dold - Puppe [6], Eilenberg - Moore [8], André [1], Beck [4], Tierney - Vogel [12], Iwai [10])。それによって,これまで対象のそれぞれに応じて考案された各種の(コ)ホモロジー論の多くが,統一的な観点でとらえられる様になった。

ここでは上記の方法を概括すると共に,functorial homology の典型としての cotriple homology について述べる。

## §1. derived functors

以下 $\mathcal{A}$ を任意の category, $\mathcal{B}$ を abelian category, $T:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を任意の(covariant) functor とする(特に断らない限り)。

もし $\mathcal{A}$ における projective class $\mathcal{P}$ (以下の定義参) が与えられたとき, 適当な条件のもとに $T$ の left derived functor $L_nT : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $(n \geqq 0)$ が定義される. この節および次節の議論はすべて dualize され得る.

$\mathcal{A}$ の objects の或る class を $\mathcal{P}$ とする. $\mathcal{A}$ の morphism $f : A \to B$ は

$$\mathcal{A}(P, f) : \mathcal{A}(P, A) \longrightarrow \mathcal{A}(P, B) \text{ が surjective for } {}^\forall P \in \mathcal{P}$$

のとき <u>$\mathcal{P}$-epimorphism</u> とよばれる. 任意の object $A \in \mathcal{A}$ に対して, $P \in \mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$-epimorphism $f : P \to A$ が存在するとき, $\mathcal{P}$ は <u>projective class</u> (in $\mathcal{A}$) とよばれる.

(1.1) abelian categories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の間の additive functor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の (left) derived fc. $L_nT : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の普通の定義をふり返って見よう.

$A \in \mathcal{A}$ の $\mathcal{P}$-projective resolution $F_\bullet^+ = (F_\bullet \to A)$ :

$$\longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \cdots\cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \to A \to 0$$

をとる. ここに $F_n \in \mathcal{P}$ $(n \geqq 0)$, かつ, アーベル群の augmented chain complex $\mathcal{A}(P, F_\bullet^+)$ が acyclic である (for ${}^\forall P \in \mathcal{P}$).

もう一つの $\mathcal{P}$-proj. resolution $F_\bullet' \to A$ をとれば, $F_\bullet \simeq F_\bullet'$ (chain equivalence). 従って $T$ の加法性から $TF_\bullet \simeq TF_\bullet'$ となり, resolution のとり方に依らずホモロジー $L_nT(A) = H_n(TF_\bullet)$, $n \geqq 0$, が同型を除いて定まる.

(1.2) 前項と同じ条件，ただし $T$ が non-additive とする．この場合には前論上の議論は成り立たない．Dold-Puppe [6] は simplicial object を用いてこの障害を除いた．

つまり，$\mathcal{A}$ における複体 (chain complex) の圏 $c(\mathcal{A})$ と単体的複体 (simplicial object) の圏 $s(\mathcal{A})$ の知られた equivalence

$$s(\mathcal{A}) \underset{K}{\overset{N}{\rightleftarrows}} c(\mathcal{A}), \quad KN \simeq Id, \quad NK \simeq Id,$$

によって $X_* = K(F_\bullet)$ をつくる．

このとき $F_\bullet \simeq F_\bullet'$ ならば $K(F_\bullet) \underset{s}{\simeq} K(F_\bullet')$ (simplicial equivalence).

ところが任意の functor $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の自然な拡張 $T^s: s(\mathcal{A}) \to s(\mathcal{B})$ は homotopy を保存する：$X_* \underset{s}{\simeq} Y_* \Rightarrow T^s(X_*) \simeq T^s(Y_*)$．従ってまた $H_n(NT^sX_*) \approx H_n(NT^sY_*)$．これによって $L_nT(A) = H_n(NT^sK(F_\bullet))$, $n \geq 0$, が定まる．

注意．1) $T$ が additive なら $NT^s = TN$，従って (1.2) は (1.1) の拡張である．2) 上述中で複体 $F_\bullet = (F_n)_{n\geq 0}$ の次元をずらして $(S^nF)_i = 0$ $(0 \leq i \leq n-1)$, $(S^nF)_i = F_{i-n}$ $(i \geq n)$ なる複体 $(S^nF)_\bullet$ を考え，$L_qT(A,n) = H_q(NT^sK(S^nF)_\bullet)$ と定義したものは位相幾何への興味深い応用をもつ (n-level derived functors).

(1.3) 前項を hint として，さらに一般の category $\mathcal{A}$，および任意の functor $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して derived functor を定義する (Iwai [10], Tierney-Vogel [12]).

$X_* \to A$ を augmented quasi-simplicial object in $\mathcal{A}$ とする（つまり必ずしも degeneracy operator を持たぬ simplicial object）. $X_*^+ = (X_* \to A)$ は, もし $X_n \in \mathcal{P}$ $(n \geqq 0)$, かつ, $\mathcal{P}$-contractible（$\mathcal{A}(P, X_*^+)$ が $\forall P \in \mathcal{P}$ につき homotopically trivial）, 言いかえれば, $a^0, \cdots, a^{n+1}: P \to X_n$ $(n \geqq -1,\ X_{-1} = A)$ が与えられて, $\varepsilon^i a^j = \varepsilon^{j-1} a^i$ $(i<j)$ をみたすとき, $a = a(a^0, \cdots, a^{n+1}): P \to X_{n+1}$ が存在して $\varepsilon^i a = a^i$ $(0 \leqq i \leqq n+1)$ となるならば, $\mathcal{P}$-proj. quasi-simplicial resolution of $A$ とよばれる. ここで $\varepsilon^i = \varepsilon^i_n : X_n \to X_{n-1}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ は $X_*^+$ の face operator.

補題. 二つの $\mathcal{P}$-proj. q.-simpl. resol. $X_* \to A$, $Y_* \to A$ に対して, $X_* \underset{s}{\simeq} Y_*$.

証）$f_{-1} = id. : A \to A$ として inductive に $f_n : X_n \to Y_n$ を定める: $f_n = a(f_{n-1}\varepsilon^0, \cdots, f_{n-1}\varepsilon^n)$. $f_* = (f_n) : X_*^+ \to Y_*^+$. 别の q.-simpl. map $g_* : X_*^+ \to Y_*^+$ をとれば $f_* \underset{s}{\simeq} g_*$ (q.-simplicially homotopic) なることを示そう. そのため次の様な homotopy $h^i_n : X_n \to Y_{n+1}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ の存在を言う:

$$\varepsilon^0 h^0_n = f_n, \quad \varepsilon^{n+1} h^n_n = g_n$$
$$\varepsilon^i h^j_n = h^{j-1}_{n-1} \varepsilon^i \qquad (i<j)$$
$$\varepsilon^{i+1} h^{i+1}_n = \varepsilon^{i+1} h^i_n$$
$$\varepsilon^i h^j_n = h^j_{n-1} \varepsilon^{i-1} \qquad (i>j+1)$$

そこで先ず, $\Delta^0_n = f_n, \Delta^1_n, \cdots, \Delta^n_n, \Delta^{n+1}_n = g_n : X_n \to Y_n$ を二重帰納法で求める. $\Delta^j_k$ が $(k<n,\ 0 \leqq j \leqq k+1)$ および

$(k=n, j>i)$ まで定まったとして,

$$\Delta_n^i = a(\Delta_{n-1}^{i-1}\varepsilon^0, \cdots, \Delta_{n-1}^{i-1}\varepsilon^{i-1}, \varepsilon^i\Delta_n^{i+1}, \Delta_{n-1}^{i}\varepsilon^{i+1}, \cdots, \Delta_{n-1}^{i}\varepsilon^n)$$

とおく. つぎに $n$ に関して帰納的に $h_n^j$ を

$$h_n^j = a(h_{n-1}^{j-1}\varepsilon^0, \cdots, h_{n-1}^{j-1}\varepsilon^{j-1}, \Delta_n^j, \Delta_n^{j+1}, h_{n-1}^{j}\varepsilon^{j+1}, \cdots, h_{n-1}^{j}\varepsilon^n)$$

で定める. 補題はこれから容易に従う.」

これを用いて, $L_nT(A) = H_n(NT^sX_*)$ と定義する.

さて $\mathcal{A}$ が abelian の場合, 前項における $KF_\bullet \to A$ は $\mathcal{P}$-proj. quasi-simpl. resol. である. これは $X_* = KF_\bullet$ とするとき, $\mathcal{A}(P, X_*)$ が Kan 条件を満たし, かつ $\mathcal{A}(P, NX_*^+) \approx \mathcal{A}(P, F_\bullet^+)$ が acyclic なることから出る. 実際 $a^0, \cdots, a^{n+1}: P \to X_n$, $\varepsilon^i a^j = \varepsilon^{j-1}a^i$ $(i<j)$, が与えられたとき, Kan 条件から $b: P \to X_{n+1}$, $\varepsilon^i b = a^i$ $(i>0)$, が存在する. このとき $\varepsilon^i(a^0 - \varepsilon^0 b) = 0$ $(i \geq 0)$. 従って $c: P \to F_{n+1}$ が存在して, $\varepsilon^0 c = a^0 - \varepsilon^0 b$, $\varepsilon^i c = 0$ $(i>0)$. そこで $a = b + c: P \to X_{n+1}$ とおけば, $\varepsilon^i a = a^i$ $(i \geq 0)$ となり, $X_*^+ = KF_\bullet \to A$ が $\mathcal{P}$-contractible なることが言えた. $F_n \in \mathcal{P}$ から $X_n \in \mathcal{P}$ は明らか.

従ってこの項(1.3)における derived fc. の定義は, 前項(1.2)における定義の拡張であることがわかる.

(1.4) 前項における quasi-simplicial resolution は, 単に derived functor を定義するという目的に対しては, 少し条件

が強過ぎるので，これを弱めることが望ましい．そのために次の簡単な remark が有用である．

任意の category $\mathcal{A}$ に対して，pre-additive category $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ が次の様にして定まる．$\mathrm{Ob}\,\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$，$\mathbb{Z}\mathcal{A}(A,B)$ は集合 $\mathcal{A}(A,B)$ から生成された自由アーベル群とする（必要ならば，$\mathbb{Z}\mathcal{A}$ に zero object を追加してもよい）．canonical inclusion $J:\mathcal{A}\to\mathbb{Z}\mathcal{A}$ により $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ の subcategory と見做せる．任意の函手 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$（$\mathcal{B}$ : abelian）は additive extension $\overline{T}:\mathbb{Z}\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ をもつ：$T=\overline{T}J$．もし $\mathcal{A}$ が additive なら canonical projection $\theta:\mathbb{Z}\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ が存在して $\theta J = Id$．さらに $T$ が additive なら $\overline{T}=T\theta$．

前に戻って $\mathcal{P}$ を projective class in $\mathcal{A}$ とする．$A\in\mathcal{A}$ に対して，augmented chain complex $X_\bullet\to A$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ :

$$\to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1}\to \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} A,\quad d_i d_{i+1}=0,$$

は，$X_n\in\mathcal{P}$ $(n\geq 0)$ かつ $\mathcal{P}$-acyclic（$\forall P\in\mathcal{P}$ に対して

$$\to \mathbb{Z}\mathcal{A}(P,X_n)\xrightarrow{\bar{d}_n} \cdots \xrightarrow{\bar{d}_1}\mathbb{Z}\mathcal{A}(P,X_0)\xrightarrow{\bar{d}_0}\mathbb{Z}\mathcal{A}(P,A)\to 0$$

が exact）のとき，<u>$\mathcal{P}$-projective resolution</u>（of $A$）とよばれる．

自明な注意として $\mathcal{P}$-acyclicity は次のことと同値：任意の $P\in\mathcal{P}$ に対して contracting homotopy

$$\bar{h}_n:\mathbb{Z}\mathcal{A}(P,X_n)\to\mathbb{Z}\mathcal{A}(P,X_{n+1}),\quad n\geq -1,\ X_{-1}=A,$$
$$\bar{d}_{n+1}\bar{h}_n+\bar{h}_{n-1}\bar{d}_n = id.$$

が存在する．

ここでも comparison theorem 「二つの $\mathcal{P}$-proj. resol. $X_\bullet \to A$, $Y_\bullet \to A$ があれば, $X_\bullet \simeq Y_\bullet$ (in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$)」が容易に従う. それ故 derived fc. は $L_nT(A) = H_n(\overline{T}X_\bullet)$, $n \geqq 0$, とおけばよい.

この定義が(1.3)におけるものの拡張であることを示そう: いま $X_* \to A$ が(1.3)における $\mathcal{P}$-projective quasi-simplicial resol. であるとする. $X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A$ は $\mathcal{P}$-epimorphism であるから, $f: P \to A$ に対して $\varepsilon h_{-1}(f) = f$ となる morphism $h_{-1}(f): P \to X_0$ が存在する. 以下帰納的に, $f: P \to X_n$ に対して $h_n(f) = a(f, h_{n-1}(\varepsilon^0 f), \cdots, h_{n-1}(\varepsilon^n f))$ とおけば $h_n$ を linear に拡張して contracting homotopy $\overline{h_n}$: $\mathbb{Z}\mathcal{A}(P, X_n) \to \mathbb{Z}\mathcal{A}(P, X_{n+1})$ が得られる.

以上でこの項における derived fc. の定義が前述中一番一般的であることがわかった((1.1)⊂(1.2)⊂(1.3)⊂(1.4)).

ここで derived fc. の簡単に導き出せる性質を述べよう.

<u>定理 1.1.</u> $L_nT(P) = \begin{cases} T(P) & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$, $P \in \mathcal{P}$.

証) $P_n = P$ $(n \geqq -1)$, $d_{2i} = id$, $d_{2i+1} = 0$, とおけば $P_\bullet \xrightarrow{d_0} P$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$-proj. resol. of $P$.」

<u>定理1.2.</u> 函手の短完全列 $0 \to T' \to T \to T'' \to 0$ (in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$) から derived fcs の長完全列が従う:

$$\to L_nT' \to L_nT \to L_nT'' \xrightarrow{\partial} L_{n-1}T' \to \cdots\cdots \to L_0T'' \to 0$$

証) $X_\bullet \to A$ を $\mathcal{P}$-proj. resol. とする. 複体の完全列 $0 \to \overline{T}'X_\bullet \to \overline{T}X_\bullet$

$\to T''X_\circ \to 0$ (in $\mathcal{B}$) から定理が得られる.」

## §2. resolution の存在

$\mathcal{A}$ における (closed) projective class $\mathcal{P}$ が与えられたとき，比較的弱い条件のもとに $\mathcal{P}$-proj. resolution の存在が示される.

(2.1) $\mathcal{A}$ が pre-additive で，zero object および kernels をもつ場合.
これは classical な case で (1.1) の意味の $\mathcal{P}$-proj. resol. の存在が容易にわかる．従ってまた (1.2) の場合にも適用される.

(2.2) $\mathcal{A}$ が finite limits (finite product, equalizer) をもつ場合.
この場合 Tierney-Vogel [12] に従って，(1.3) における quasi-simpl. resol. の存在を示そう.

まず，$\mathcal{A}$ における morphism の列 $(f^0, \cdots, f^n) : A \rightrightarrows B$ に対して，その simplicial kernel $(k^0, \cdots, k^{n+1}) : K \rightrightarrows A$ を次の二条件をみたすものとして定義する：

(i) $\quad f^i k^j = f^{j-1} k^i \quad (0 \leq i < j \leq n+1)$,

(ii) $(k^0, \cdots, k^{n+1})$ は性質(i)に関して universal (つまり，他の任意の $(h^0, \cdots, h^{n+1}) : H \rightrightarrows A$ で条件(i)をみたすものが与えられたとき，$h : H \to K$ が一意的に存在して $h^i = k^i \circ h$ となる).

補題. $\mathcal{A}$ が finite limits をもてば，simplicial kernel をもつ.

証) 与えられた $(f^0, \cdots, f^n) : A \rightrightarrows B$ に対して，整数対 $(i, j)$,

$0 \le i < j \le n+1$，の集合に辞書式順序を入れる：

$$(ij) < (kl) \iff i<k,\ \text{または}\ i=k\ \text{かつ}\ j<l.$$

このとき射 $K_{ij} \xrightarrow{\gamma_{ij}} A^{n+2} = A \times \cdots \times A$ を帰納的に定義する。$p_j : A^{n+2} \to A$ $(0 \le j \le n+1)$ を射影として，まず

$\gamma_{01} = \mathrm{equalizer}(f^0 p_1, f^0 p_0)$，$K_{01} \xrightarrow{\gamma_{01}} A^{n+2} \overset{f^0 p_1}{\underset{f^0 p_0}{\rightrightarrows}} B$ とおく。

$(kl)$ が $(ij)$ の直後の元とするとき

$\pi = \mathrm{equalizer}(f^k p_l \circ \gamma_{ij}, f^{l-1} p_k \circ \gamma_{ij})$，$K_{kl} \xrightarrow{\pi} K_{ij} \xrightarrow{\gamma_{ij}} A^{n+2} \overset{f^k p_l}{\underset{f^{l-1} p_k}{\rightrightarrows}} B$

として，$\gamma_{kl} = \gamma_{ij} \circ \pi$ と定義する。このとき

$K = K_{n,n+1} \xrightarrow{\gamma_{n,n+1}} A^{n+2} \xrightarrow{p_j} A$，$k^j = p_j \circ \gamma_{n,n+1}$ が求めるものである。」

（limit の概念を使えば上の証明は次の様になる：抽象的に finite category $\mathcal{D} = \{x_0, \cdots, x_{n+1}, y_{ij} ; 0 \le i < j \le n+1\}$ を考える。各 $i, j$ $(i<j)$ について morphism $g^{ij} : x_i \to y_{ij}$，$g^{ji} : x_j \to y_{ij}$ が対応し，他の morphisms はすべて trivial なものとする。いま函手 $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ を，$D(x_i) = A$，$D(y_{ij}) = B$，$D(g^{ij}) = f^{j-1}$，$D(g^{ji}) = f^i$ により定義すれば，$K = \varprojlim_{\mathcal{D}} D$）。

<u>定理 2.1.</u> $\mathcal{A}$ が finite limits をもてば，任意の $A \in \mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$-proj. quasi-simpl. resolution をもつ。

証）$P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0^0} A$，$P_0 \in \mathcal{P}$，なる $\mathcal{P}$-epim. をとる。$\varepsilon_0^0$ の simplicial kernel $(k_1^0, k_1^1) : K_1 \rightrightarrows P_0$ をとり，$P_1 \xrightarrow{e_1} K_1$，$P_1 \in \mathcal{P}$，を $\mathcal{P}$-epim. とする。$\varepsilon_1^i = k_1^i \circ e_1 : P_1 \to P_0$ $(i = 0, 1)$ と定義する。以下 inductive に $(\varepsilon_{n-1}^0, \cdots, \varepsilon_{n-1}^{n-1})$ の s. kernel $K_n$，$P_n$，$e_n$，$\varepsilon_n^i$，$K_{n+1}$，$\cdots$ がとれる。

これによって augmented $g$.-simpl. object $P_* \to A$ が得られる．いま $a^0, \cdots, a^{n+1} : P \to P_n$ が $\varepsilon^i a^j = \varepsilon^{j-1} a^i$ $(i<j)$ をみたせば，$b : P \longrightarrow K_{n+1}$ が存在して $a^i = k^i_{n+1} \circ b$．そこで $a : P \to P_{n+1}$ が $b = e_{n+1} \circ a$ なるようにとれる．」

(2.3) $\mathcal{A}$ に cotriple $\mathbf{G} = (G, \varepsilon, \delta)$ があって $\mathcal{P} = \mathcal{P}_G$ の場合．

まず定義からはじめる．cotriple $\mathbf{G} = (G, \varepsilon, \delta)$ in $\mathcal{A}$ とは，covariant functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，natural transformations $\varepsilon : G \to I_{\mathcal{A}}$，$\delta : G \to G^2 = G \circ G$ の組で，

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, equal] & G^2 \arrow[d, shift right, "\varepsilon G"'] \arrow[d, shift left, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & G^2 \arrow[d, "\delta G"] \\
G^2 \arrow[r, "G\delta"'] & G^3
\end{tikzcd}
$$

可換図式

なるものである（functor coalgebra ともよばれる）．これと dual な概念は triple とよばれる．

cotriple は普通，函手の adjoint pair $(S, U)$，$U : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$，$S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$，から導びかれる：$C \in \mathcal{C}$，$A \in \mathcal{A}$ に対して，natural equivalence

$$\lambda \ : \ \mathcal{A}(S(C), A) \cong \mathcal{C}(C, U(A))$$

があるから，natural transformations

$$\varepsilon(A) = \lambda^{-1}(1_{U(A)}) : SU(A) \to A \qquad \text{in } \mathcal{A},$$

$$\eta(C) = \lambda(1_{S(C)}) : C \longrightarrow US(C) \qquad \text{in } \mathcal{C},$$

が得られ，$\varepsilon S \circ S\eta = 1_S$，$U\varepsilon \circ \eta U = 1_U$ を用いれば，

cotriple $(SU, \varepsilon, S\eta U)$ in $\mathcal{A}$ を得る．逆に，任意の cotriple が，適当な adj. pair of fcs. から induce されることも知られている．

$\mathcal{A}$ に cotriple $\mathbb{G} = (G, \varepsilon, \delta)$ が与えられたとき，$A \in \mathcal{A}$ に対して

$$G_n(A) = G^{n+1}(A) \quad , \quad (n \geq 0) \quad \text{とおけば,}$$

$$\varepsilon^i = \varepsilon^i_n = G^i \varepsilon G^{n-i}(A) : G_n(A) \to G_{n-1}(A) \quad , \quad 0 \leq i \leq n,$$

および $\delta^i = \delta^i_n = G^i \delta G^{n-i}(A) : G_n(A) \to G_{n+1}(A) \quad , \quad 0 \leq i \leq n,$

が定義されて，これらの間に次の関係が成り立つ：

$$\varepsilon^i \varepsilon^j = \varepsilon^{j-1} \varepsilon^i \qquad (i < j)$$

$$\varepsilon^i \delta^j = \begin{cases} \delta^{j-1} \varepsilon^i & (i < j) \\ \mathrm{id}. & (i = j, j+1) \\ \delta^j \varepsilon^{i-1} & (i > j+1) \end{cases}$$

$$\delta^i \delta^j = \delta^{j+1} \delta^i \qquad (i \leq j) .$$

これによって $\varepsilon^i, \delta^i$ をそれぞれ face operators, degeneracy oper. として，augmented simplicial object $G_*(A) \xrightarrow{\varepsilon} A$ in $\mathcal{A}$ が得られる．いま $\mathcal{P}_G = \{ G(A)$ およびその retracts ; $A \in \mathcal{A} \}$ とおけば，$\mathcal{P}_G$ は projective class in $\mathcal{A}$ となる．

<u>定理 2.2.</u> cotriple $(G, \varepsilon, \delta)$ in $\mathcal{A}$ が与えられたとき，augmented chain complex $G_\bullet(A) \to A$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ with $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon^i_n$ は，$\mathcal{P}_G$-proj. resolution of $A$ である．

証）contraction $h_n : \mathcal{A}(P, G_n(A)) \to \mathcal{A}(P, G_{n+1}(A))$，$(P \in \mathcal{P}_G)$，をつぎの様に定義する．まず $P$ は $G(P)$ の retract であることを

注意しよう．いま $P \underset{\pi}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} G(B)$ があって $\pi\lambda = 1_P$ とする．このとき

$$\theta = G\pi \circ \delta \circ \lambda : P \xrightarrow{\lambda} G(B) \xrightarrow{\delta} G^2(B) \xrightarrow{G\pi} G(P) \quad \text{とおけば}$$

$$\varepsilon(P) \circ \theta = \varepsilon(P) \circ G\pi \circ \delta \circ \lambda = \pi \circ \varepsilon G \circ \delta \circ \lambda = \pi \circ \lambda = 1_P .$$

そこで，$f : P \to G_n(A)$ に対して，$h_n(f) = Gf \circ \theta \quad (n \geq -1)$，とおけば

$$\varepsilon^0 h_n(f) = \varepsilon^0 \circ Gf \circ \theta = f \circ \varepsilon(P) \circ \theta = f ,$$

$$\varepsilon^i h_n(f) = \varepsilon^i \cdot Gf \cdot \theta = G(\varepsilon^{i-1} f) \cdot \theta = h_{n-1}(\varepsilon^{i-1} f) \quad (i \geq 1).$$

これから contracting homotopy $\bar{h}_n : Z\mathcal{Q}(P, G_n(A)) \to Z\mathcal{Q}(P, G_{n+1}(A))$ を得る．」

この場合 $L_n T(A) = H_n(\overline{T} G_\bullet(A)) = H_n(NT^s G_*(A))$，$n \geq 0$，をとくに $H_n(A, T)_{\mathbb{G}}$ とかき，T-係数 cotriple homology という（もし T が contravariant ならば $H^n(A, T)_{\mathbb{G}}$ を cotriple cohomology）.

この場合の特性は resolution が functorial に得られていることである．従って次の様な見方が生ずる：

$$\to TG_n \to \cdots \to TG_0 \to T \to 0 \quad \text{in } \mathcal{B}^{\mathcal{Q}}$$

を T の resolution と考えることが出来るが．

実際，functor category $\mathcal{B}^{\mathcal{Q}}$ に cotriple $(\tilde{G}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta})$ が，$\tilde{G}(T) = TG$，$\tilde{\varepsilon}(T) = T\varepsilon$，$\tilde{\delta}(T) = T\delta$ によって自然に導入され，$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{\tilde{G}}$ とおけば，これは $\mathcal{B}^{\mathcal{Q}}$ における projective class となる．

いま evaluation fc. $E_A : \mathcal{B}^{\mathcal{Q}} \to \mathcal{B}$，$E_A(T) = T(A)$，に対して，$\tilde{\mathcal{P}}$-proj. resolution $C_\bullet \to T$ をとって，$E_A$ の derived functor

$$\tilde{L}_n E_A(T) = H_n(E_A C_\bullet) = H_n(C_\bullet(A))$$

が定まる. 上の $TG_\bullet \to T$ を $\tilde{\mathcal{P}}$-proj. resolution であることがわかるから $\qquad \tilde{L}_n E_A(T) \approx H_n(E_A TG_\bullet) = H_n(A,T)_{\mathbb{G}}$

である.

<u>補題</u> 上の場合, $C_\bullet \to T$ が $\tilde{\mathcal{P}}$-acyclic $\Longleftrightarrow$ $C_\bullet G \to TG \to 0$ が split exact ( $\exists\, s_n : C_nG \to C_{n+1}G\ (n \geq -1)$, $d_{n+1}G \circ s_n + s_{n-1} \circ d_nG = 1_{C_nG}$ ).

証) $\Rightarrow$ $\quad h_n : \mathcal{B}^a(P, C_n) \to \mathcal{B}^a(P, C_{n+1})$ の存在から

$s_n = \{ h_n (C_n\varepsilon - C_n\varepsilon \circ s_{n-1} \circ d_nG) G \} \circ C_n\delta$ とおけばよい.

$\Leftarrow$ $\quad h_n(f) = C_{n+1}\varepsilon \circ s_n \circ fG \circ \theta$ とすればよい. 」

この補題における条件を少し弱めて, $C_\bullet G \to TG \to 0$ が, 単に, exact のとき, $C_\bullet \to T$ を <u>weakly $\tilde{\mathcal{P}}$-acyclic</u> とよぶ.

<u>定理 2.3.</u> augmented chain complex $C_\bullet \to T$ in $\mathcal{B}^a$ が, $\tilde{\mathcal{P}}$-proj. (i.e. $C_n \in \tilde{\mathcal{P}}, n \geq 0$), かつ, weakly $\tilde{\mathcal{P}}$-acyclic のとき

$$H_n(C_\bullet(A)) \approx H_n(A,T)_{\mathbb{G}} .$$

証) $K_{p,q} = \bar{C}_p G_q(A)\ \ (p,q \geq 0)$, $K = \sum K_{p,q}$ とおいて double complex の spectral seq. を考える.

$$ {}^{\mathrm{I}}E^2_{p,q} = H^{\mathrm{I}}_p H^{\mathrm{II}}_q(K) = \begin{cases} H_p(C_\bullet(A)) & (q=0) \\ 0 & (q>0) \end{cases} \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(K)$$

$$ {}^{\mathrm{II}}E^2_{p,q} = H^{\mathrm{II}}_q H^{\mathrm{I}}_p(K) = \begin{cases} H_q(\bar{T}G_\bullet(A)) & (p=0) \\ 0 & (p>0) \end{cases} \underset{q}{\Longrightarrow} H_n(K)$$

両 spect. seq. は collapse する. 従って

$$H_n(C_\bullet(A)) \approx H_n(\bar{T}G_\bullet(A)) . 」$$

上の定理の証明中 ${}^{I}E^{1}_{pq} = H^{II}_{q}(K_{p,\bullet}) = C_p(A)$ for $q=0$, $0$ for $q>0$, を使った。これの証明を補充する： $H^{II}_{q}(K_{p,\bullet}) = H_q(A, C_p)_{\mathfrak{G}}$ であり, $C_p \in \hat{\mathcal{P}}$ である。一般に次のことが言える：

<u>定理 2.4.</u> $T \in \hat{\mathcal{P}} \Rightarrow H_q(A, T)_{\mathfrak{G}} = T(A)$ for $q=0$, $0$ for $q>0$.

証) $T_n = T$ $(n \geq 0)$, $d_{2i} = id$, $d_{2i+1} = 0$ とすれば $T_\bullet \xrightarrow{d_0} T$ は $T$ の $\hat{\mathcal{P}}$-proj. resolution in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ であるから, 明らかに

$$H_q(A, T)_{\mathfrak{G}} \approx \hat{L}_q E_A(T) = T(A) \text{ for } q=0,\ 0 \text{ for } q>0. ⌟$$

## §3. André homology

すでに見た様に derived fc. の定義において, initial fc. $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ 上で与えられている必要はない。$\mathcal{P}$, 或いは $\mathcal{P}$ の objects から成る $\mathcal{A}$ の full subcategory $\hat{\mathcal{P}}$ 上で与えられていれば十分であった。そこで $\hat{\mathcal{P}}$ を一般化して, 単に $\mathcal{A}$ の full subcategory $\mathfrak{M}$ を category of models とよぶ.

これに対して homology theory

$$H_n(\ ,\ ): \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathcal{B} \quad , n \geq 0,$$

を定義しよう.

(3.1) augmented chain complex $M_\bullet \to A$ in $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ で, $M_n \in \mathfrak{M}$, $n \geq 0$, かつ, $\mathbb{Z}\mathcal{A}(M, M_\bullet^+)$ が acyclic for ${}^\forall M \in \mathfrak{M}$, なるものを $A$ の <u>$\mathfrak{M}$-resolution</u> とよぶ.

これが存在する場合, $T \in \mathcal{B}^{\mathfrak{M}}$ に対して $H_n(\bar{T}M_\bullet)$ は $A$ の

$\mathfrak{M}$-resolution のとり方に依らない．これで $H_n(A,T)$ を定義する．

(3.2) $\mathfrak{M}$ が small full subcategory of $\mathfrak{A}$ で，$\mathcal{B}$ が small colimits, $\varinjlim$，をもち，かつこれが exact functor である (AB4)) とする．

このとき制限函手 $R: \mathcal{B}^{\mathfrak{A}} \to \mathcal{B}^{\mathfrak{M}}$ は left adjoint $S: \mathcal{B}^{\mathfrak{M}} \to \mathcal{B}^{\mathfrak{A}}$ をもつ(同型を除いて $S$ は一意的) その具体的な形は

$$S(T)(A) = \sum_{M \xrightarrow{\alpha} A} T(M) \quad , \quad T \in \mathcal{B}^{\mathfrak{M}},$$

で与えられる．従って $R$ はもとより，$S$ も exact，$G=SR$ も exact functor である．adjoint pair $(S,R)$ から $\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}$ における cotriple $(G,\varepsilon,\delta)$，$G=SR$，が定まり，それに関する projective class $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathcal{P}_G = \{G(C)$ およびそれらの retracts ; $C \in \mathcal{B}^{\mathfrak{A}}\}$ in $\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}$ が定まる．

chain complex $(C_\bullet,\lambda)$ in $\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}$ with $RC_0 \xrightarrow{\lambda} T$, $T \in \mathcal{B}^{\mathfrak{M}}$，が与えられたとき，$C_n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ $(n \geq 0)$ かつ $RC_\bullet \to T \to 0$ が exact in $\mathcal{B}^{\mathfrak{M}}$ であるならば，$(C_\bullet,\lambda)$ を $T$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}$-resolution とよぶ．

$H_n(C_\bullet(A))$ は $T$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}$-resolution のとり方に依らず同型の意味で定まるので，これで $H_n(A,T)$ を定義する．

$T \in \mathcal{B}^{\mathfrak{M}}$ の標準的な $\widetilde{\mathfrak{M}}$-resolution がつぎの様にして得られる：$C_n = G^n S(T)$ $(n \geq 0)$，$RC_0 = RS(T) \xrightarrow{\gamma} T$．ただし $\gamma$ は

$$\gamma(M): RS(T)(M) = \sum_{M' \xrightarrow{\alpha} M} T(M') \xrightarrow{\Sigma T(\alpha)} T(M) \quad , \quad M \in \mathfrak{M},$$

で与えられ, $d_n : G^nS(T) \to G^{n-1}S(T)$, $n \geq 1$, は

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon_n^i, \quad \begin{cases} \varepsilon_n^i = G^i \varepsilon G^{n-i} S(T) & (0 \leq i \leq n-1) \\ \varepsilon_n^n = G^{n-1} S \gamma \end{cases}$$

で与えられる. これは André [1] に与えられた複体と同じものである. 実際

$$G^n S(T)(A) = \sum_{M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{\alpha_1} M_0 \xrightarrow{\alpha} A} T(M_n).$$

(3.3) 以上の様に, $(A,T) \in \mathcal{C} \times \mathcal{B}^{\mathfrak{M}}$ に対して, A の $\mathfrak{M}$-resolution を用いて定義した homology と, T の $\widetilde{\mathfrak{M}}$-resolution を用いて定義した homology とは, 両 resolutions が存在する場合 (勿論 (3.2) における条件を仮定する) に一致することが証明できる. 従って homology $H_n(A,T)$ の定義として (3.1), (3.2) のどちらを用いてもよいことになる. これが André の homology である. これが §1 で述べたような derived functors を含んでいることは明らかであろう.

$H_n(A,T)$ の簡単な性質を挙げれば

$$\begin{cases} H_n(A,T) = 0 \ (n>0) & \text{for } A \in \mathfrak{M}, \text{ or } T = RC \text{ で } C \in \widetilde{\mathfrak{M}} \\ H_0(M,T) = T(M), \ H_0(A,RC) = C(A) & \text{for } C \in \widetilde{\mathfrak{M}} \end{cases}$$

係数函手の exact seq. $0 \to T' \to T \to T'' \to 0$ から long exact seq.

$$\to H_n(A,T') \to H_n(A,T) \to H_n(A,T'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,T') \to \cdots \to H_0(A,T'') \to 0$$

が従う. またこれらの性質によって $H_n(A,T)$ は characterize される.

## §4. examples

(4.1) まず簡単な example として位相空間の singular homology について考える: $\mathcal{A} = \underline{Top}$ を位相空間と連続写像の category, その full subcategory $\mathcal{M} = \{\Delta_n \,;\, n \geqq 0\}$ として standard $n$-simplex から成るものを考える. $T : \mathcal{M} \to Ab$ を constant functor, $T(\Delta_n) = \mathfrak{g}$ $(n \geqq 0)$ : fixed abelian group, $T(f) = 1_{\mathfrak{g}}$, $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{M}$ とする. $S_n \in Ab^{\mathcal{A}}$ $(n \geqq 0)$ を $S_n(X) = \sum_{\Delta_n \xrightarrow{\sigma} X} T(\Delta_n)$ で定義するとき, 容易に $S_n \in \widehat{\mathcal{M}}$ がわかる. $S_n(X)$ は普通の $\mathfrak{g}$-係数 singular $n$-chain group. $d_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ も普通の様に定義する. standard simplex は trivial な singular homology group をもつから $RS_{\bullet} \xrightarrow{\lambda} T \to 0$ は exact, 従って $(S_{\bullet}, \lambda)$ は $T$ の $\widehat{\mathcal{M}}$-resolution である. 故に $H_n^{sing}(X, \mathfrak{g}) \approx H_n(X, T)$.

(4.2) $K$ を単位元をもつ可換環, $\mathcal{A}$ を associative $K$-algebras with unit の category とする. $\Lambda \in \mathcal{A}$ とし, $(\mathcal{A}, \Lambda)$ を, algebra over $\Lambda$ : $\Gamma \xrightarrow{\gamma} \Lambda$ を object,

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \Gamma' \arrow[dl, "\gamma'"] \\ & \Lambda & \end{tikzcd}$$

を morphism とする $\mathcal{A}$ の subcategory とする. ${}_K\mathcal{M}$ を $K$-modules の category とするとき, forgetful functor $U : \mathcal{A} \to {}_K\mathcal{M}$ の left adjoint $S : {}_K\mathcal{M} \to \mathcal{A}$ は tensor algebra functor で与えられる. この adjoint pair $S \dashv U$ から, また adj. pair

$$(\mathcal{A}, \Lambda) \underset{S}{\overset{U}{\rightleftarrows}} ({}_K\mathcal{M}, U(\Lambda))$$

が自然に導びかれる. 従って cotriple $\mathbb{G} = (G, \varepsilon, \delta)$, $G = SU$, in

$(\mathcal{A},\Lambda)$ が定義される．いま $W$ を $(\Lambda-\Lambda)$-bimodule とすれば，$K$-derivation functor $D_W:(\mathcal{A},\Lambda)\to {}_K\mathfrak{M}$，$D_W(\Gamma)=\mathrm{Der}_K(\Gamma,W)$，を係数 functor として，cotriple cohomology $H^n(\Gamma,D_W)_{\mathbb{G}}$ が定義される．

<u>定理4.1.</u> (Barr-Beck [2])

$$H^n(\Gamma,D_W)_{\mathbb{G}}\approx\begin{cases}\mathrm{Der}_K(\Gamma,W) & (n=0)\\ H^{n+1}(\Gamma,W) & (n\geqq 1),\end{cases}$$

ただし $H^{n+1}(\Gamma,W)$ は Hochschild cohomology group である．

群の cohomology についても同様なことが言える．

(4.3) $\mathcal{A}$ を，単位元をもつ可換環(と単位元を保つ準同形写像)の category とする．$A\in\mathcal{A}$ に対して，${}_A\mathcal{A}$ で $A$-algebra の category，$C\in{}_A\mathcal{A}$ のとき，${}_A\mathcal{A}_C$ で $A$-algebra over $C$ の category を表わす．adjoint pair $(F,U)$ ${}_A\mathcal{A}\underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}}\underline{\mathrm{Set}}$ が，underlying set functor $U$ と free $A$-algebra (polynomial algebra) functor $F$ によって与えられ，これは自然に adjoint pair ${}_A\mathcal{A}_C\underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}}(\underline{\mathrm{Set}},U(C))$ を induce する．そこで cotriple $\mathbb{G}=(G,\varepsilon,\delta)$，$G=FU$，in ${}_A\mathcal{A}_C$ が定義される．

$B\in{}_A\mathcal{A}_C$ とするとき，同様にして cotriple $\overline{\mathbb{G}}=(\overline{G},\overline{\varepsilon},\overline{\delta})$ in ${}_B\mathcal{A}_C$ が得られる．このとき adjoint pair ${}_B\mathcal{A}_C\underset{Y}{\overset{X}{\rightleftarrows}}{}_A\mathcal{A}_C$ が，$X$ は自然な inclusion functor，$Y$ は，$Y(\Gamma)=(B\otimes_A\Gamma\to C)$ によって与えられる．$Y$ は $X$ の left adjoint であり，$\overline{G}=YGX$ が成り立つ．

いま $W$ を $C$-module とするとき，A-derivation functor ${}_AD$ : ${}_A\mathfrak{a}_C \to {}_C\mathfrak{M}$ , ${}_AD(\Gamma) = \mathrm{Der}_A(\Gamma, W)$, を係数とする cotriple cohomology $H^n(\Gamma, {}_AD)_{\mathfrak{G}}$ は André [1] において，$H^n(A, \Gamma, W)$ と表わされたものと同じである．同様にして B-derivation functor ${}_BD : {}_B\mathfrak{a}_C \to {}_C\mathfrak{M}$ , ${}_BD(\Gamma) = \mathrm{Der}_B(\Gamma, W)$, や $H^n(\Gamma, {}_BD)_{\mathfrak{G}} = H^n(B, \Gamma, W)$ が考えられる。ここで ${}_AD = {}_BD\gamma$ なることに注意しよう．

<u>定理 4.2</u> (André [1]). $B \in {}_A\mathfrak{a}_C$ , $W$ を $C$-module とすれば完全系列

$$0 \to H^0(B, C, W) \to H^0(A, C, W) \to H^0(A, B, W) \to \cdots$$
$$\cdots \to H^{n-1}(A, B, W) \to H^n(B, C, W) \to H^n(A, C, W) \to H^n(A, B, W) \to \cdots$$

が得られる．

References

[1] M. André, Méthode Simpliciale en Algèbre Homologique et Algèbre Commutative, Lecture Notes in Math. 32, Springer 1967.

[2] M. Barr - J. Beck, Acyclic models and triples, Proc. La Jolla Conf. on Categorical Algebra, Springer 1966.

[3] ——————, Homology and standard constructions, Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, Lect. Notes in Math. 80, 1969.

[4] J. Beck, Triples, Algebras and Cohomology, Dissertation, Columbia U. 1967.

[5] H. Cartan - S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton U. P. 1956.

[6] A. Dold - D. Puppe, Homologie Nicht-Additiver Funktoren, Anwendungen, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 11 (1961).

[7] S. Eilenberg - J. C. Moore, Foundation of Relative Homological Algebra, Memoirs, A.M.S. 55 (1965)

[8] ——————, Adjoint functors and triples, Illinois J. Math. 9 (1965).

[9] R. Godement, Topologie algébrique et Théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[10] A. Iwai, Simplicial cohomology and n-term extensions of algebras, J. Math. Kyoto Univ. 9, No. 3 (1969)

[11] S. MacLane, Homology, Springer and Academic P. 1963.

[12] M. Tierney - W. Vogel, Simplicial derived functors, Category Theory, Homology Theory and Their Applications I, Lect. Notes in Math. 86 (1969)

[13] N. Shimada, H. Uehara, F. Brenneman, A. Iwai, Triple cohomology of algebras and two term extensions, Publ. RIMS. 5 (1969).